

Μιγαδική Ανάλυση

Σ. Αναστασίου και Β.Βλάχου

Ασκήσεις στα ολοκληρώματα

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_{|z|=3} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} dz,$$

$$(ii) \int_{|z-e|=2} \frac{1}{(z-1)\text{Log}z} dz,$$

$$(iii) \int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz,$$

$$(iv) \int_{|z|=2} \tan z dz,$$

$$(v) \int_{|z|=4} \frac{z}{\sin z} dz,$$

$$(vi) \int_{|z|=r} \frac{1}{(z-2)(z-3)} dz, \text{ για κάθε } r \in (0, +\infty) \setminus \{2, 3\}.$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}, \quad a > 1,$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}, \quad a > 1,$$

$$(iii) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad |a| < 1,$$

$$(iv) \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta - n\theta) d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx,$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx,$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4} dx, \quad a > 0,$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2} dx.$$

4. Έστω p πολώνυμο 5ου βαθμού. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 5, \quad R \geq R_0.$$