Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ – Ασκήσεις V –

#1. Αν $X_n, n=1,2,\ldots$ είναι α.ι. τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, $\mathcal{U}(0,1)$, και $X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$, να δειχθεί ότι $n(1-X_{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\kappa} X$, όπου X είναι τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(1)$. (Υπόδειξη: Χρήση του ορισμού)

#2. Αν X_λ είναι τ.μ. με κατανομή Poisson, $P(\lambda)$, να δειχθεί ότι $\dfrac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\kappa} X$, όπου $X \sim N(0,1)$. (Υπόδειξη: Χρήση του Θεωρήματος συνεχείας)

#3. Αν $X_n, n=1,2,\ldots$ είναι α.ι. τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(1)$ και $X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$, να δειχθεί ότι $X_{(n)} - \log n \xrightarrow{\kappa} X$, όπου X είναι τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F(x) = e^{-e^{-x}}$, $x\in\mathbb{R}$ (η X ονομάζεται κατανομή Gumbel ή κατανομή ακραίας τιμής – extreme value distribution). (Υπόδειξη: Χρήση του ορισμού)

#4. Χρησιμοποιώντας το ΚΟΘ, να δοθούν προσεγγίσεις των πιθανοτήτων:

(α) $P\left(|X_1^3+\ldots+X_n^3| > \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$, όταν $X_n, n=1,2,\ldots$ είναι α.ι. τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο $(-1,1)$, $\mathcal{U}(-1,1)$.

(β) $P\left(X_1^2+\ldots+X_n^2 < 2n+\sqrt{5n}\right)$, όταν $X_n, n=1,2,\ldots$ είναι α.ι. τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(1)$.

#5. Αν $X_n, n=1,2,\ldots$ είναι α.ι. τυχαίες μεταβλητές με $EX_1=\mu$ και $\mathrm{Var}X_1=\sigma^2<\infty$, να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty} P(\overline{X}_n > \mu)$, όπου $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.