Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Λύσεις των Ασκήσεων IV +

#1. Αν $Y=-X$ (με πιθανότητα 1), τότε $Var(X-Y) = Var(2X) = 4\sigma^2$. Αντίστροφα, έστω $Var(X-Y)=4\sigma^2$. Τότε $Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)=4\sigma^2$ ή $\sigma^2+\sigma^2-2\rho\sigma^2=4\sigma^2$, δηλαδή $\rho=-1$, όπου ρ ο συντελεστής συσχέτισης X και Y. Επειδή $\rho=-1$, έχουμε $Y=\alpha X+\beta$ με $\alpha<0$ (με πιθανότητα 1). Άρα, $Var(Y)=Var(\alpha X+\beta)=\alpha^2 Var(X)$, δηλαδή $\sigma^2=\alpha^2\sigma^2$, και επειδή $\alpha<0$, έχουμε $\alpha=-1$. Επομένως $Y=-X+\beta$ οπότε $EY=E(-X+\beta)=-EX+\beta$ ή $EX+EY=\beta$, δηλαδή $\beta=0$, το οποίο σημαίνει ότι $Y=-X$.

#2. (α) Έχουμε $0 \le Var(X_1+\cdots+X_n-X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} Var X_i - 2\sum_{i=1}^{n} Cov(X_i, X_{n+1})$ $= (n+1)\sigma^2 - 2n\rho\sigma^2$ (επειδή, λόγω ανεξαρτησίας, $Cov(X_i,X_j)=0$, $i\neq j$ και $i,j=1,\dots,n$). Άρα, $(n+1)\sigma^2-2n\rho\sigma^2\geq 0 \iff \rho\le \frac{n+1}{2n}$.

(β) Θεωρούμε τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ $X_1+\cdots+X_n$ και X_{n+1}, έστω ρ^*. Έχουμε $Cov(X_1+\cdots+X_n, X_{n+1}) = n\rho\sigma^2$, $Var(X_1+\cdots+X_n)=n\sigma^2$ και $Var(X_{n+1})=\sigma^2$, οπότε $\rho^* = \frac{n\rho\sigma^2}{\sqrt{n}\,\sigma^2} = \frac{n}{\sqrt{n}}\rho$. Όμως, $\rho^*\le 1$ οπότε $\frac{n}{\sqrt{n}}\rho\le 1 \iff \rho\le\frac{\sqrt{n}}{n}$.

#3. $Cov(X_1,\bar{X}) = \frac{1}{n}Cov(X_1,\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}Cov(X_1,X_1) = \frac{1}{n}Var(X_1)=\frac{1}{n}\sigma^2$, επειδή $Cov(X_1,X_i)=0$, $i\neq 1$, λόγω ανεξαρτησίας. Επίσης, $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ και άρα $\rho_{X_1,\bar{X}} = \frac{Cov(X_1,\bar{X})}{\sqrt{VarX_1}\sqrt{Var\bar{X}}} = \frac{\frac{1}{n}\sigma^2}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma^2} = \frac{\sqrt{n}}{n}$.

#4. $Cov(X,\sum_{k=1}^{n}X^{2k}) = \sum_{k=1}^{n}Cov(X,X^{2k})$. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $Cov(X,X^{2k})=0$ για κάθε $k=1,\dots,n$.
$Cov(X,X^{2k}) = E(X^{2k+1})-(EX)(EX^{2k})$. Όμως για $X\sim U(-1,1)$ έχουμε $E(X^{2k+1})=0$, $k=0,1,2,\dots$