Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Ασκήσεις IV++

1. Αν X_n, $n=1,2,\ldots$ είναι α.λ. τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,\theta)$, $U(0,\theta)$, με $\theta>0$, να βρεθούν τα κατά πιθανότητα όρια των ακολουθιών:
(α) $X_{(n)}$, όπου $X_{(n)}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$. (β) $X_{(1n)}$, όπου $X_{(1n)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$. (γ) $\bar{X}_n$, όπου $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. (δ) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.
Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας καθένα από τα όρια των (α), (γ) και (δ) και θεωρώντας ότι η τιμή του θ είναι άγνωστη, να δοθούν αντίστοιχες προσεγγίσεις (εκτιμήσεις) της άγνωστης τιμής του θ που βασίζονται σε (δεδομένες) τιμές των $X_1,\ldots,X_n$, για "μεγάλο" n.

2. Αν X_n, $n=1,2,\ldots$, είναι α.λ. τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\lambda)$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $X_{(1n)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$ αλλά και η $\sqrt{n}\cdot X_{(1n)}$ συγκλίνει κάθε μια κατά πιθανότητα στο 0.

3. Αν X_n, $n=1,2,\ldots$ είναι α.λ. τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, $B(1,p)$, να δειχθεί ότι $P(|\bar{X}_n-p|>\varepsilon)\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}$ $\forall\ 0<p<1$, όπου $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

4. Αν X είναι τ.μ. και η θετική συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, να δειχθεί ότι

$$P(X\geq\varepsilon)\leq\frac{Eg(X)}{g(\varepsilon)},\ \forall\varepsilon>0.$$