Μιγαδική Ανάλυση

Σ. Αναστασίου και Β.Βλάχου

Ασκήσεις σε όρια και μεμονωμένες ανωμαλίες

1. Να υπολογίσετε την πολλαπλότητα της ρίζας z_0 για κάθε μια από τις συναρτήσεις:
   $(i)\ f(z) = e^{zcosz-z} - 1,\ z_0 = 0$
   $(ii)\ f(z) = Log^2(cosz),\ \ z_0 = 2\pi$
   $(iii)\ f(z) = z^2(e^{z^2} - 1),\ z_0 = 0$
   $(iv)\ f(z) = 6sinz^3 + z^3(z^6 - 6), z_0 = 0$
2. Να υπολογίσετε τα όρια που ακολουθούν:
   $(i)\ \lim_{z\to 0} \frac{(1-cosz)^2}{zsinz(1-e^z)^2}$
   $(ii)\ \lim_{z\to 0} \frac{Log(1+z+z^2)}{sinz}$
   $(iii)\ \lim_{z\to 0} \frac{[Log(1+z+z^2)]^5(1-cosz)}{sin^3z(1-e^z)^4}$
3. Να βρείτε τι είδους ανωμαλία έχουν οι συναρτήσεις στα αντίστοιχα σημεία και να υπολογίσετε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα εκεί:
   $(i)\ f(z) = \frac{cos(\pi z/2)}{(z-1)^3},\ z_0 = 1$
   $(ii)\ f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z^3}},\ z_0 = 0$
   $(iii)\ f(z) = (z+1)^4 sin[\frac{\pi}{(z+1)}],\ z_0 = -1$
   $(iv)\ f(z) = \frac{Log^2 z}{(z-1)^5},\ z_0 = 1$
   $(v)\ f(z) = (z^2+z)cos(\frac{1}{z}),\ z_0 = 0$
4. Να βρείτε τι τάξης πόλος είναι το z_0 για τις συναρτήσεις που ακολουθούν.
   $(i)\ f(z) = \frac{e^z}{\cos(z)-1},\ z_0 = 0$
   $(ii)\ f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^{20}},\ z_0 = 1$
   $(iii)\ f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^{4z} - e^{-4z}},\ z_0 = 0$
   $(iv)\ f(z) = \frac{e^z - e + (z-1)^2}{(z-1)^{100}},\ z_0 = 0$
5. Να δείξετε ότι αν το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι επουσιώδης ανωμαλία των συναρτήσεων $f(z),\ g(z)$, τότε είναι επουσιώδης ανωμαλία και της $f(z) + g(z)$. Είναι επουσιώδης ανωμαλία και των συναρτήσεων $f(z)g(z),\ \frac{f(z)}{g(z)}$;

6. Η $f(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση και ικανοποιεί τη σχέση $f(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι τα ανώμαλα σημεία της $g(z) = \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}$ είναι όλα επουσιώδη.

7. Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική στον τρύπιο δίσκο $0 < |a - z_0| < R,\ R > 0$, και
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$
είναι το ανάπτυγμα Laurent της με κέντρο το z_0, τότε να δείξετε ότι
$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n},$$
όπου $M_r = max\{|f(z)|,\ |z - z_0| = r,\ 0 < r < R\}$.