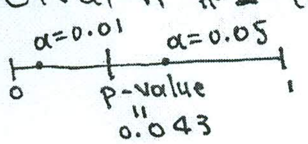
Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις IV + (Λύσεις)

#1. Πέραν της εφαρμογής της γενικής θεωρίας κατασκευής ελΠ, μια σύντομη λύση είναι η εξής. Θέτουμε $Y_1 = X_1$ και $Y_2 = \frac{X_2}{3}$. Τότε Y_1, Y_2 είναι α.ι. με κοινή κατανομή $N(0, \theta^2)$. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην κατασκευή ελΠ, $H_0: \theta^2 = \theta_0^2$ κατά $H_1: \theta^2 \neq \theta_0^2$, για τη διασπορά κανονικής κατανομής γνωστής μέσης τιμής (0, στην προκειμένη περίπτωση) με βάση τ.δ. $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)$. Αυτός ο έλεγχος έχει κατασκευαστεί στη θεωρία των ελΠ.

#2. Αρκεί να βρεθεί η κατανομή της X_2^2/X_1^2 υπό την $H_0: \sigma_2 = 3\sigma_1$. Τότε $\frac{X_2^2}{X_1^2} = 9\,\frac{X_2^2/(3\sigma_1)^2}{X_1^2/\sigma_1^2} = 9\,\frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_1/1} = 9F_{1,1}$, όπου $F_{1,1}$ είναι F κατανομή με β.ε. 1 και 1 για αριθμητή και παρονομαστή. Επομένως, υπό την H_0, η σ.σ. $\frac{1}{9}\frac{X_2^2}{X_1^2} \sim F_{1,1}$ και οι σταθερές c_1, c_2 μπορούν να ληφθούν έτσι ώστε $P_{\sigma_2=3\sigma_1}\left(\frac{1}{9}\frac{X_2^2}{X_1^2} > \frac{1}{9}c_2\right) + P_{\sigma_2=3\sigma_1}\left(\frac{1}{9}\frac{X_2^2}{X_1^2} < \frac{1}{9}c_1\right) = \alpha$. Επιλέγοντας κάθε μία από τις πιθανότητες του αθροίσματος να είναι $\alpha/2$, έχουμε $c_2 = 9F_{1,1,\alpha/2}$ και $c_1 = 9F_{1,1,1-\alpha/2}$, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η $F_{1,1}$ και η $\frac{1}{F_{1,1}}$ έχουν την ίδια κατανομή (εξ ορισμού της κατανομής F) οπότε $F_{1,1,1-\alpha/2} = 1/F_{1,1,\alpha/2}$. Τέλος, επειδή $F_{1,1} = T^2 \sim t_1^2$ (τετράγωνο κατανομής t με 1 β.ε.), τα c_1, c_2 μπορούν να εκφραστούν και μέσω ποσοστιαίων σημείων της t_1 (η οποία είναι η κατανομή Cauchy).

#3. Είναι η #2 του Φυλλαδίου Ασκήσεις V

#4. 

. Από τον ορισμό της p-value: απόρριψη της Ho για α=0.05 και αποδοχή της Ho για α=0.01.

#5. Είναι η #1 του Φυλλαδίου Ασκήσεις V

#6. Είναι η #4 του -"- -"- , που έχει λυθεί στην τάξη.

#7. $H_0: \theta = 25$ $H_1: \theta \neq 25$. Πρόκειται για έλεγχο μέσης τιμής κανονικής κατανομής με γνωστή διασπορά ($\sigma^2 = 9$). Εφαρμογή του z-test.

#8. . $H_0: \theta_1 = \theta_2$ $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$. Πρόκειται για έλεγχο ισότητας μέσων τιμών κανονικών κατανομών με κοινή αλλά άγνωστη διασπορά. Εφαρμογή του (δίπλευρου) t-test για δύο δείγματα.

#9. Είναι η #3 του Φυλλαδίου Ασκήσεις V.

#10. Είναι ειδική περίπτωση (με n=2) της #1 του Φυλλαδίου Ασκήσεις V.

#11. . Είναι η #5 του Φυλλαδίου Ασκήσεις V, που έχει λυθεί στην τάξη.

#12. α. $L(\theta)=\frac{\prod x_i^2}{\theta^n}e^{-\frac{1}{3\theta}\sum x_i^3}$, $\hat{\theta}=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n x_i^3$, $\hat{\theta}_0=\frac{2}{3}\equiv\theta_0$

$$\lambda(\underline{x})=\frac{L(\hat{\theta})}{L(\theta_0)}=\left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n e^{-\frac{1}{3\hat{\theta}}\sum x_i^3+\frac{1}{3\theta_0}\sum x_i^3}$$
$$=\left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n e^{-\frac{1}{3\hat{\theta}}(3n\hat{\theta})+\frac{1}{3\theta_0}(3n\hat{\theta})}, \quad \ln\lambda(\underline{x})=\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}-\ln\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}-1\right)n.$$

Η μορφή του ελπ είναι $\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underline{x})>c\\ \gamma, & =\\ 0, & <\end{cases}$

$\lambda(\underline{x})>c \iff \ln\lambda(\underline{x})>\ln c \iff \frac{\hat{\theta}}{\theta_0}-\ln\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}-1>\frac{\ln c}{n}=c_1 \iff \frac{\hat{\theta}}{\theta_0}>y_2$ ή $\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}<y_1$

(όπως προκύπτει από την μελέτη της συνάρτησης $g(y)=y-\ln y-1,\ y>0$). $\iff$
$\sum X_i^3>c_2$ ή $\sum X_i^3<c_1$

β. Θέτουμε $\gamma=0$ και για τον υπολογισμό των y_1,y_2, (ή των c_1,c_2) βρίσκουμε την κατανομή της $Y=\sum_{i=1}^n X_i^3$ υπό την $H_0:\ \theta=\theta_0\ (=2/3)$.

Θέτουμε $Y_i=X_i^3$, τότε $Y_i\sim\mathcal{E}(3\theta)\ \forall\theta>0$ (από τον τύπο μετασχηματισμού κατανομής τ.μ.). Επειδή $Y_1,\dots,Y_n$ είναι ανεξάρτητες, προκύπτει ότι $Y=\sum X_i^3\sim G(\alpha=n,\beta=3\theta)$

Άρα, υπό την $H_0:\ \theta=\theta_0$, $2\frac{Y}{3\theta_0}\sim G(\alpha=n,\beta=2)\equiv\chi^2_{2n}$. Ο ελπ έχει

μέγεθος α, εφ' όσον $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}>y_2\right)+P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}<y_1\right)=\alpha. \iff$
$P_{\theta=\theta_0}\left(y_1<\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}<y_2\right)=1-\alpha \iff P_{\theta=\theta_0}\left(2ny_1<\frac{2Y}{3\theta_0}<2ny_2\right)=1-\alpha \iff$
$\int_{2ny_1}^{2ny_2} f_{2n}(x)\,dx=1-\alpha$ (1), όπου f_{2n} είναι η πυκνότητα της χ^2_{2n}.

Επί πλέον, τα y_1,y_2 ικανοποιούν τη σχέση $y_2-\ln y_2-1=y_1-\ln y_1-1 \iff$
$\ln y_2-\ln y_1=y_2-y_1$ (2), η οποία προκύπτει από τη λύση της ανισότητας $y-\ln y-1>c_1$ (και τη μελέτη της συνάρτησης $g(y)=y-\ln y-1$).

Επομένως, ο ελπ μεγέθους α είναι
$$\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & \sum X_i^3>ny_2 \text{ ή } \sum X_i^3<ny_1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$
με y_1,y_2 τη λύση του συστήματος (1) και (2).