

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Ασκήσεις IV +

#1. Δίνονται τ.μ. X και Y με $EX + EY = 0$ και $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2 (< \infty)$.
Να δείχθει ότι $\text{Var}(X - Y) = 4\sigma^2$ αν και μόνον αν $P(X + Y = 0) = 1$, (δηλαδή,
 $Y = -X$ με πιθανότητα 1).

#2. Δίνονται ανεξάρτητες τ.μ. X_1, \dots, X_n , $n=1, 2, \dots$, με κοινή διασπορά $\sigma^2 (< \infty)$. Επί
πλέον, η τ.μ. X_{n+1} έχει επίσης διασπορά σ^2 και κοινό συντελεστή συσχέτισης,
έστω ρ , με κάθε μισό από τις X_1, \dots, X_n .

(α) Θεωρώντας την $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n - X_{n+1})$, να δείχθει ότι $\rho \leq \frac{n+1}{2n}$.

(β) Να δείχθει ότι το φράγμα του ερωτήματος (α) μπορεί να βελτιωθεί σε $\rho \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$.

#3. Δίνονται ανεξάρτητες τ.μ. X_1, \dots, X_n με κοινή διασπορά $\sigma^2 (< \infty)$. Να
βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ X_1 και $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

#4. Αν η τ.μ. X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο $(-1, 1)$, να δείχθει ότι
οι τ.μ. X και $\sum_{k=1}^n X^{2k}$ είναι ασυσχέτιστες για κάθε $n=1, 2, \dots$.