

# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(18.09.2009)

1. Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση είναι ακέραια και φραγμένη τότε είναι σταθερή (Θ. Liouville).  
Στην συνέχεια αποδείξτε το βασικό Θεώρημα της Αλγεbras. (20)
2. Εξετάστε ως προς το όριο την ακολουθία  $(\frac{1+i}{2})^n$ ,  $n=1,2,\dots$  (10)
3. Αποδείξτε ότι οι πέμπτες ρίζες της μονάδας αποτελούν κορυφές κανονικού πενταγώνου εχχράψιμο στον κύκλο  $(0,1)$  (15)
4. Υπολογίστε το  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (\frac{1}{4})^n$ . (10)
5. Υπολογίστε τις τιμές της έκφρασης  $(-2)^i$ . (10)
6. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι αναλυτική σε ένα χωρίο, έχει πάντα παράγωγα; Μπορεί να έχει απείρια ριζών; (Απολογηθείτε τον) (20)  
βυλλοχοιθιμοθασ
7. Αν  $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ , βρείτε  $v(x,y)$ , τέτοια ώστε η συνάρτηση  $f = u + iv$  να είναι αναλυτική στο  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . (15)
8. Αν  $n$   $f$  είναι ακέραια, με  $|f|^2$  αρμονική αποδείξτε ότι  $n$   $f$  είναι σταθερή. (15)
9. Βρείτε και ταξινομήστε τα ανώμαλα σημεία και υπολογίστε τα αντίστοιχα Residues για τις συναρτήσεις:  
 $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ ,  $g(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$  (15)
10. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:  
 $\int_{\gamma} z \cdot e^{\frac{1}{z}} dz$  και  $\int_{\gamma} \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} dz$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 98\pi]$  (15)

ΘΕΜΑ 1. i) Υπολογίστε τα  $(1-i)^{562}$ ,  $i^{3i}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 4^{-n}$ ,  $\text{Log}(e^{\frac{22\pi i}{9}}) + \text{Log}(e^{\frac{5\pi i}{9}})$   
 ii) Λύστε τις εξισώσεις  $z^9 = 1$ ,  $e^z = 1$ ,  $e^z = e^2 \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 2. i) Αν  $f$  αμεραία με  $a\text{Re}f + b\text{Im}f = c$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|a| + |b| > 0$ ) αποδείξτε ότι  $f$  σταθερή.  
 ii) Βρείτε όλες τις αμεραίες  $f$  με  $|e^f| = 5$ .

iii) Βρείτε, στην περίπτωση που υπάρχουν, συναρτήσεις  $f_1, f_2$  αμεραίες τέτοιες ώστε  $\text{Re}f_1(z) = e^{4y-5} \cos 4x$ ,  $\text{Re}f_2(z) = y^2$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

ΘΕΜΑ 3. i) Αν  $f$  αμεραία και  $f(z) \cos z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , αποδείξτε ότι

$f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

ii) Αν  $f$  αμεραία με  $\frac{f'(\frac{1}{n^3})}{f(\frac{1}{n^3})} = \frac{2n^3}{n^6+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  και  $f(0) = 1$  αποδείξτε ότι  $f(z) = z^2 + 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iii) Αν  $f$  αμεραία με  $\text{Re}f(z) = c$  επάνω στην περιφέρεια  $|z| = 1$  και  $f(0) = 5$  βρείτε την  $f$ .

(Τρία θέματα με πρώτο την αρχή μεγίστου)

ΘΕΜΑ 4. i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent στο δακτύλιο  $0 < |z-5| < 1$  η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-5} \cos\left(\frac{1}{2z-10}\right)$  και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμά της υπεράνω της καμπύλης  $\gamma(t) = 5 + \frac{1}{2} e^{it}$ ,  $t \in [0, 8\pi]$

ii) Να υπολογιστεί χωρίς χρήση Residues το ολοκλήρωμα  $\int_{\gamma} e^{3z} (z-5)^{-n} dz$  για όλες τις αμέραιες τιμές του  $n$ .

$\gamma(t) = 5 + e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

iii) Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματά

$\int_0^{\infty} (x^2+1)^{-2} dx$ ,  $\int_{[1, 1+i]} \frac{1}{z} dz$

- Θέμα 1 → 3μ.
- Θέμα 2 → 3μ
- Θέμα 3 → 4μ.
- Θέμα 4 → 3.5

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** (15μ). Μελετήστε ως προς την αναλυσιμότητα και την παραγωγισιμότητα την συνάρτηση  $f(z) = (x^2 - y) + i(x + y^2)$ ,  $z \in \mathbb{C}$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (α) (20μ). Αποδείξτε ότι κάθε αμεραία  $\gamma$  φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή και στη συνέχεια το βασικό θεώρημα της Αγγέβρου ή αναλλοίωτα (β) (25μ.)

Αν μια συνάρτηση  $f$  αναλυτική σε τόπο (χωρίς)  $D$  έχει σημείο συσπείρωσης ριζών  $z_0 \in D$  αποδείξτε ότι το  $z_0$  είναι ρίζα της  $f$  και η  $f$  είναι τοπικά μηδενική στο  $z_0$  (σε περιοχή του μηδένος). Στη συνέχεια αποδείξτε το θεώρημα των ριζών.

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (10μ). Διατυπώστε την αρχή του μεγίστου και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την για τον υπολογισμό του

$$\sup_{|z| < 1} |z^3 + \sqrt{5}z - 99|$$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** (15μ). Αναλύστε σε σειρές Laurent τις συναρτήσεις:

$$\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3 + z^2 + z + 1} \quad (|z| < 1, |z| > 1), \quad (7z + 9) \cos\left(\frac{1}{3z - 6}\right), \quad (|z - 2| > 0)$$

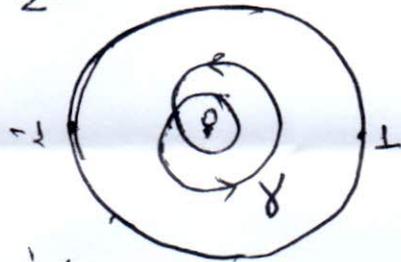
**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** (35μ). Υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

$$\int_{[0,1]} z \sin z^2 e^{\cos z^2} dz$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad \int_\gamma \frac{e^{-2z} - e^{3z}}{z^3} dz$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z(e^z - 1)} dz$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$



**ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup>** (30μ).

(α) Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^{n^2}$ , και υπολογίστε την ακμή της πρώτης για  $z = \frac{1}{2}$  (Υπ. Βρείτε τον αναγνώστη της τύπου).

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z}$  δεν έχει παράχουλα στο  $\mathbb{C} - \{0\}$  αλλά έχει στο δίσκο  $|z - 1| < 1$ .

(γ) Βρείτε όλες τις αμεραίες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad f(0) = 99 \quad n = 1, 2, \dots$$