

ΘΕΜΑ 1. i) Υπολογίστε τα $(1-i)^{562}$, i^{3i} , $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 4^{-n}$, $\text{Log}(e^{\frac{22\pi i}{9}}) + \text{Log}(e^{\frac{5\pi i}{9}})$
 ii) Λύστε τις εξισώσεις $z^9 = 1$, $e^z = 1$, $e^z = e^2 \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 2. i) Αν f αμεραία με $a\text{Re}f + b\text{Im}f = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| > 0$) αποδείξτε ότι f σταθερή.
 ii) Βρείτε όλες τις αμεραίες f με $|e^f| = 5$.

iii) Βρείτε, στην περίπτωση που υπάρχουν, συναρτήσεις f_1, f_2 αμεραίες τέτοιες ώστε $\text{Re}f_1(z) = e^{4y-5} \cos 4x$, $\text{Re}f_2(z) = y^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

ΘΕΜΑ 3. i) Αν f αμεραία και $f(z) \cos z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, αποδείξτε ότι

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

ii) Αν f αμεραία με $\frac{f'(\frac{1}{n^3})}{f(\frac{1}{n^3})} = \frac{2n^3}{n^6+1}$, $n = 1, 2, \dots$ και $f(0) = 1$ αποδείξτε ότι $f(z) = z^2 + 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iii) Αν f αμεραία με $\text{Re}f(z) = c$ επάνω στην περιφέρεια $|z| = 1$ και $f(0) = 5$ βρείτε την f .

(Τρία θέματα με πρώτο την αρχή μεγίστου)

ΘΕΜΑ 4. i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent στο δακτύλιο $0 < |z-5| < 1$ η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-5} \cos\left(\frac{1}{2z-10}\right)$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμά της υπεράνω της καμπύλης $\gamma(t) = 5 + \frac{1}{2} e^{it}$, $t \in [0, 8\pi]$

ii) Να υπολογιστεί χωρίς χρήση Residues το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} e^{3z} (z-5)^{-n} dz \quad \text{για όλες τις αμέραιες τιμές του } n.$$

$$\gamma(t) = 5 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

iii) Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματά

$$\int_0^{\infty} (x^2+1)^{-2} dx, \quad \int_{[1, 1+i]} \frac{1}{z} dz$$

Θέμα 1 \rightarrow 3μ.

Θέμα 2 \rightarrow 3μ

Θέμα 3 \rightarrow 4μ.

Θέμα 4 \rightarrow 3.5

ΘΕΜΑ 1^ο (15μ). Μελετήστε ως προς την αναλυσιμότητα και την παραγωγισιμότητα την συνάρτηση $f(z) = (x^2 - y) + i(x + y^2)$, $z \in \mathbb{C}$

ΘΕΜΑ 2^ο (α) (20μ). Αποδείξτε ότι κάθε αμεραία γ φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή και στη συνέχεια το βασικό θεώρημα της Αγγέβρου ή αναλλοτιότητα (β) (25μ.)

Αν μια συνάρτηση f αναλυτική σε τόπο (χωρίς) D έχει σημείο συσπέρσεως ριζών $z_0 \in D$ αποδείξτε ότι το z_0 είναι ρίζα της f και η f είναι τοπικά μηδενική στο z_0 (σε περιοχή του μηδένος). Στη συνέχεια αποδείξτε το θεώρημα των ριζών.

ΘΕΜΑ 3^ο (10μ). Διατυπώστε την αρχή του μεγίστου και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την για τον υπολογισμό του

$$\sup_{|z| < 1} |z^3 + \sqrt{5}z - 99|$$

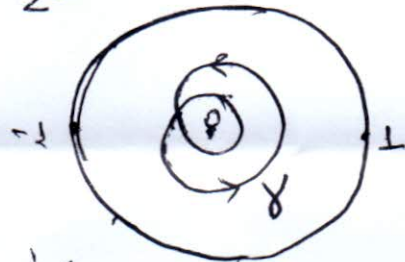
ΘΕΜΑ 4^ο (15μ). Αναλύστε σε σειρές Laurent τις συναρτήσεις:

$$\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3 + z^2 + z + 1} \quad (|z| < 1, |z| > 1), \quad (7z + 9) \cos\left(\frac{1}{3z - 6}\right), \quad (|z - 2| > 0)$$

ΘΕΜΑ 5^ο (35μ). Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{[0,1]} z \sin z^2 e^{\cos z^2} dz, \quad \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad \int_\gamma \frac{e^{-2z} - e^{3z}}{z^3} dz$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z(e^z - 1)} dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z^4} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$



ΘΕΜΑ 6^ο (30μ).

(α) Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^{n^2}$, και υπολογίστε την ακμή της πρώτης για $z = \frac{1}{2}$ (Υπ. Βρείτε τον αναγνώστη της αίτιας).

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ δεν έχει παράχουλα στο $\mathbb{C} - \{0\}$ αλλά έχει στο δίσκο $|z-1| < 1$.

(γ) Βρείτε όλες τις αμεραίες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad f(0) = 99 \quad n = 1, 2, \dots$$