

#1. α. $L(\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta - i)^2\right\}$, $\ln L(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta - i)^2$
 $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta - i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - i) = n\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - i) = \bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \bar{x} - \frac{n+1}{2}$
 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta})}{L(\theta_0)}$, όπου $\hat{\theta}_0 = 0$. Επομένως, $\lambda(x) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta} - i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2}$, οπότε

$\ln \lambda(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta} - i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2 = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2 - 2\hat{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - i) + n\hat{\theta}^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2 = \hat{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - i) - \frac{n\hat{\theta}^2}{2} = n\hat{\theta}^2/2$. Συνεπώς ο ελπ είναι

$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \lambda(x) > c \\ 0, & \lambda(x) \leq c \end{cases}$. Τώρα, $\lambda(x) > c \Leftrightarrow n\hat{\theta}^2/2 > \ln c \Leftrightarrow |\hat{\theta}| > \sqrt{\frac{2 \ln c}{n}}$. Δηλαδή η μορφή του ελπ είναι $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |\hat{\theta}| > c \\ 0, & |\hat{\theta}| \leq c \end{cases}$.

Θέτουμε $\gamma = 0$, λόγω συμμετρίας κατανομής και υπολογίζουμε την στα-0, $\theta = 0$ ώστε $P_{\theta=0}(|\hat{\theta}| > c) = \alpha$. Όταν $\theta = 0$, $x_i \sim N(i, 1)$ ή $x_i - i \sim N(0, 1)$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - i) \sim N(0, n)$ ή $\hat{\theta} \sim N(0, \frac{1}{n})$ ή $\sqrt{n}\hat{\theta} \sim N(0, 1)$. Συνεπώς,
 $P_{\theta=0}(|\hat{\theta}| > c) = \alpha \Leftrightarrow P(\sqrt{n}|\hat{\theta}| > \sqrt{n}c) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{n}c = z_{\alpha/2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$.

Τελικά, ο ελπ μεγέθους α είναι: $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |\hat{\theta}| > \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \\ 0, & |\hat{\theta}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \end{cases}$.

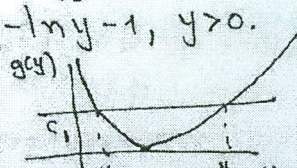
#2. α. $L(\theta) = \frac{2}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} (x_1 + 2x_2)\right\}$, $\ln L(\theta) = \ln 2 - 2 \ln \theta - \frac{1}{\theta} (x_1 + 2x_2)$,

$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = -\frac{2}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} (x_1 + 2x_2) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x_1 + 2x_2}{2}$.

β. $\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta})}{L(\theta_0)}$, όπου $\hat{\theta}_0 = \theta_0$. Επομένως, $\lambda(x) = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^2 e^{-\frac{1}{\hat{\theta}}(x_1 + 2x_2) + \frac{1}{\theta_0}(x_1 + 2x_2)}$
 ή $\lambda(x) = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^2 e^{-\frac{1}{\hat{\theta}}(2\hat{\theta}) + \frac{1}{\theta_0}(2\hat{\theta})} = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^2 e^{-2 + 2\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}}$

μορφή του ελπ είναι $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \lambda(x) > c \\ 0, & \lambda(x) \leq c \end{cases}$. $\lambda(x) > c \Leftrightarrow \ln \lambda(x) > \ln c \Leftrightarrow 2\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - \ln \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1\right) > \ln c \Leftrightarrow \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - \ln \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1 > \frac{\ln c}{2}$

$\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - \ln \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 1 > c_1 \Leftrightarrow g\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right) > c_1$, όπου $g(y) = y - \ln y - 1$, $y > 0$.
 Είναι, $g'(y) = 1 - \frac{1}{y} = \begin{cases} > 0, & y > 1 \\ = 0, & y = 1 \\ < 0, & 0 < y < 1 \end{cases}$ και $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = -\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} g(y)$.



και α'ρα $g\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right) > c_1 \Leftrightarrow \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} > y_2$ ή $\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} < y_1$. Θέτουμε $\gamma = 0$ και υπολογίζουμε τα

y_1, y_2 έτσι ώστε $g(y_1) = g(y_2) (= c_1)$ και $E_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$. Άρα,
 $y_1 - \ln y_1 = y_2 - \ln y_2$ (1) και $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} > y_2\right) + P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0} < y_1\right) = \alpha$ (2).

Όταν $\theta = \theta_0$, $2X_2 \sim E(\theta_0)$ και $X_1 \sim E(\theta_0)$, συνεπώς $X_1 + 2X_2 \sim G(\alpha=2, \beta=\theta_0)$

και $\frac{2}{\theta_0} (X_1 + 2X_2) \sim G(\alpha=2, \beta=2) \equiv \chi_4^2$. Όμως, $\frac{2}{\theta_0} (X_1 + 2X_2) = \frac{4\hat{\theta}}{\theta_0}$ και

η (2) γράφεται $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{4\hat{\theta}}{\theta_0} < \frac{4\hat{\theta}}{\theta_0} < 4y_2\right) = 1 - \alpha$. Τα y_1, y_2 είναι λοιπόν η λύση

του συστήματος των (1) και (3). Μια ισοδύναμη μορφή του συστήματος είναι

η εξής: Θέτουμε $4y_1 = c_1$ και $4y_2 = c_2$, οπότε η (1) γίνεται $c_1 - 4 \ln c_1 = c_2 - 4 \ln c_2$ και η (3) $\Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} f_4(x) dx = 1 - \alpha$, όπου $f_4(x)$ είναι η πυκνότητα της χ_4^2 .

Της χ_4^2 .

(1) $y - \ln y = y_2 - \ln y_2 \Leftrightarrow y - y_2 = \ln y - \ln y_2 \Leftrightarrow y - y_2 = \ln \frac{y}{y_2}$

(2) $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{4\hat{\theta}}{\theta_0} < \frac{4\hat{\theta}}{\theta_0} < 4y_2\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{4\hat{\theta}}{\theta_0} < 4y_2\right) = 1 - \alpha$

(3) $\int_{c_1}^{c_2} f_4(x) dx = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{2} x^2 e^{-x/2} dx = 1 - \alpha$

#3. $L(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_2-4\theta)^2 - \frac{1}{2}(x_1-\theta)^2}$, $\ln L(\theta) = -\ln 2\pi - \frac{1}{2}(x_1-\theta)^2 - \frac{1}{2}(x_2-4\theta)^2$
 $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = (x_1-\theta) + 4(x_2-4\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x_1+4x_2}{17}$
 $\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_0)}$, όπου $\hat{\theta}_0 = 0$. Επομένως, $\lambda(x) = e^{-\frac{17}{2}\hat{\theta}^2 + \hat{\theta}(x_1+4x_2)} = e^{-\frac{17}{2}\hat{\theta}^2 + 17\hat{\theta}^2} = e^{\frac{17}{2}\hat{\theta}^2}$

Η μορφή του ελπ είναι $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \lambda(x) > c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
 $\lambda(x) > c \Leftrightarrow \frac{17}{2}\hat{\theta}^2 > \ln c \Leftrightarrow |\hat{\theta}| > c_1 \Leftrightarrow |x_1+4x_2| > c_2$. Άρα $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x_1+4x_2| > c_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
 ο ελπ είναι οντως γνωστή της σ.σ. X_1+4X_2 (επαρκής σ.σ.)

Θέτουμε $\gamma=0$ και βρούμε την κατανομή της σ.σ. X_1+4X_2 όταν $\theta=0$.
 Είναι $X_1 \sim N(0,1)$, $4X_2 \sim N(0,16)$, οπότε $X_1+4X_2 \sim N(0,17)$.
 $(X_1+4X_2)/\sqrt{17} \sim N(0,1)$. Για τον υπολογισμό του c_2 , έχουμε
 $P_{\theta=0}(|X_1+4X_2| > c_2) = \alpha \Leftrightarrow P(|X_1+4X_2|/\sqrt{17} > c_2/\sqrt{17}) = \alpha \Leftrightarrow$
 $c_2/\sqrt{17} = z_{\alpha/2}$ ή $c_2 = \sqrt{17} z_{\alpha/2}$ και ο ελπ μεγέθους α είναι
 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x_1+4x_2| > \sqrt{17} z_{\alpha/2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Σχόλιο: Στην #1, θέτοντας $Y_i = X_i - i$, $i=1, \dots, n$ έχουμε ότι $Y_1, \dots, Y_n$ είναι α.ι. $\sim N(0,1)$. Άρα ο ελπ βάσει των X_i γίνεται ελπ βάσει των Y_i . Όμως ο ελπ $H_0: \theta=0$ $H_1: \theta \neq 0$ χρησιμοποιώντας τα Y_i είναι (όπως γνωρίζουμε) το Z -test (δίνουμε) $\hat{\theta}$.
 $\varphi(y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}|\bar{Y}| > z_{\alpha/2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Όμως $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i = \frac{1}{n} \sum (X_i - i) = \bar{X} - \frac{n+1}{2}$

όπως κατασκευάστηκε στην #1.

άρα καταλήγουμε στον ίδιο έλεγχο.

#4. $H_0: \theta=1$ $H_1: \theta \neq 1$ $\varphi(x)$ έχει λυθεί στην τζήν.

$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)}$ $\Rightarrow \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum (X_i - 1) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum (X_i - 1)$
 Επίπλεον, $\hat{\theta}_0 = 1$ και $\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_0)} = \frac{1}{\hat{\theta}^n} e^{-\frac{1}{\hat{\theta}} \sum (X_i - 1) + \sum (X_i - 1)} = \frac{1}{\hat{\theta}^n} e^{-n + n\hat{\theta}}$. Επομένως
 $\lambda(x) > c_1 \Leftrightarrow -n \ln \hat{\theta} - n + n\hat{\theta} > \ln c_1 \Leftrightarrow \hat{\theta} - \ln \hat{\theta} - 1 > \ln c_1/n = c$.

Όπως και στην Άσκηση #2, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με $\hat{\theta} > c_2$ ή $\hat{\theta} < c_1$, όπου $c_1 - \ln c_1 = c_2 - \ln c_2$ (1). Επιλέγοντας $\gamma=0$, λόγω συνέχειας κατανομής των X_i , οι σταθερές c_1, c_2 ικανοποιούν επίπλεον τη σχέση $P_{\theta=1}(\hat{\theta} > c_2 \text{ ή } \hat{\theta} < c_1) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta=1}(c_1 < \hat{\theta} < c_2) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$
 $P_{\theta=1}(nc_1 < \sum_{i=1}^n (X_i - 1) < nc_2) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P_{\theta=1}(\sum_{i=1}^n (X_i - 1) < nc_2) = 1 - \alpha$. Όταν $\theta=1$, $X_i - 1 \sim E(1)$ (γιατί;) και $\sum_{i=1}^n (X_i - 1) \sim G(\alpha=n, \beta=1)$, οπότε $\sum (X_i - 1) \sim \chi_{2n}^2$.
 Η (2) τότε γράφεται $P(2nc_1 < \chi_{2n}^2 < 2nc_2) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{2nc_1}^{2nc_2} f(x) dx = 1 - \alpha$ (3),
 όπου $f(x)$ είναι η πυκνότητα της χ_{2n}^2 . Τελικά, οι σταθερές c_1, c_2 είναι η λύση του συστήματος των (1) και (3).