Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις IV (Λύσεις)

#1. α. Για $\theta_1<\theta_2 \in [0,1]$, $f(x;\theta_2)/f(x;\theta_1) = \dfrac{\theta_2 x + (1-\theta_2)(1-x)}{\theta_1 x + (1-\theta_1)(1-x)} =$
$= \dfrac{Ax+B}{\Gamma x+\Delta} \uparrow$ ως προς x, επειδή ο αριθμητής της παραγώγου του κλάσματος είναι $A\Delta - B\Gamma > 0$, όπου $A = 2\theta_2 - 1$, $B = 1-\theta_2$, $\Gamma = 2\theta_1 - 1$, $\Delta = 1-\theta_1$.
Επομένως, έχουμε ΜΛΠ ως προς την $T(X)=X$.

β. Λόγω του (α) και επειδή $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, η μορφή του Ι.Ε. είναι
$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & X<c \\ \gamma, & =c \\ 0, & >c \end{cases}$. Θέτουμε $\gamma=0$, λόγω συνεχούς κατανομής της $T(X)=X$ και υπολογίζουμε c ώστε $P_{\theta=1/2}(X<c)=\alpha$. Για $\theta=1/2$,
$f(x;\theta)=1$, $0<x<1$, δηλ. $\mathcal{U}(0,1)$. Άρα $P_{\theta=1/2}(X<c)=c$, δηλ. $c=\alpha$, και
$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X<\alpha \\ 0 & \geq \end{cases}$ είναι ο Ι.Ε. μεγέθους α. Η ισχύς του είναι
$\pi(1/3) = P_{\theta=1/3}(X<\alpha) = \int_0^\alpha \{\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}(1-x)\}dx = \ldots$

#2. α. $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \theta^n e^{(\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i}$, $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in S = (0,1)^n$ που δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ. Επιπλέον, $f(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+C(\theta)D(\underset{\sim}{x})}$, $\underset{\sim}{x}\in S$,
όπου $C(\theta)=\theta-1$ και $D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^n \ln x_i$

β. Από το (α) και επειδή $C(\theta)=\theta-1\uparrow$ ως προς θ, έχουμε ΜΛΠ ως προς $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^n \ln X_i$. Επομένως, λόγω της μορφής τη $H_1: \theta<1$, ο Ο.Ι.Ε. είναι
$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum \ln x_i < c \\ \gamma, & = \\ 0, & > \end{cases}$. Παίρνουμε $\gamma=0$, επειδή $\sum_{i=1}^n \ln X_i$ έχει συνεχή κατανομή. Θέτουμε $Y_i := -\ln X_i$, $i=1,\ldots,n$. Τότε και $Y_1,\ldots,Y_n$ είναι ανεξάρτητες.
για $\theta=1$, $Y_i \sim \mathcal{E}(1)$, (προκύπτει εύκολα από τον τύπο μετασχηματισμού κατανομής τ.μ.)
οπότε $-\sum \ln X_i \ G(a=n, \beta=1)$ ή $-2\sum_{i=1}^n \ln X_i \sim G(a=n,\beta=2) \equiv \chi^2_{2n}$.
Για τον υπολογισμό του c: $\sup_{\theta\geq 1} E_\theta \varphi(\underset{\sim}{X}) = \alpha \underset{(\text{θεωρία})}{\Leftrightarrow} E_{\theta=1}\varphi(\underset{\sim}{X}) = \alpha \Leftrightarrow$
$P_{\theta=1}(-2\sum \ln X_i > -2c) = \alpha \Leftrightarrow P(\chi^2_{2n} > -2c) = \alpha \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}\chi^2_{2n,\alpha}$.

γ. p-value: επίλυση της ανισότητας $\sum \ln x_i < -\frac{1}{2}\chi^2_{2n,\alpha}$ ως προς α. Άρα
$-2\sum \ln x_i > \chi^2_{2n,\alpha} \Leftrightarrow F_{2n}(-2\sum \ln x_i) > F_{2n}(\chi^2_{2n,\alpha}) = 1-\alpha \Leftrightarrow$
$\alpha > 1 - F_{2n}(-2\sum \ln x_i) = \text{p-value}$, όπου F_{2n} είναι η σ.κ. της χ^2_{2n}.

#3. Έχει λυθεί στην τάξη.

#4. Όπως στην #3, θέτουμε κατ' αρχάς $P_{\theta=2}(X_{(n)}<c)=\alpha$ και βρίσκουμε ότι $c = 2\sqrt[3n]{\alpha}$. Λύνοντας την ανισότητα $x_{(n)} < c \Leftrightarrow x_{(n)} < 2\sqrt[3n]{\alpha}$, έχουμε
$\alpha > [x_{(n)}/2]^{3n} = x_{(n)}^{3n}/8^n = \text{p-value}$. Στην προκειμένη περίπτωση, $x_{(n)} = 0.97$, άρα η p-value είναι $(0.97/2)^9$.