

Στατιστική Συμπερασματολογία II - Ασκήσεις III + (Λύσεις)

Οι #3, #4 έχουν λυθεί στην τάξη

#1. $H_0: X \sim f_0$ κατά $H_1: X \sim f_1$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \lambda(x) \geq k \\ 0, & \lambda(x) < k \end{cases}, \text{ όπου } \lambda(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)}$$

Άρα, $\lambda(x) = \begin{cases} 2(1+x), & -1 \leq x < 0 \\ 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$\lambda(x) \geq k \Leftrightarrow 2(1+x) \geq k, (-1 \leq x < 0) \text{ ή } 2(1-x) \geq k, (0 \leq x \leq 1) \Leftrightarrow \frac{k}{2} - 1 \leq x < 0 \text{ ή } 0 \leq x \leq 1 - \frac{k}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{2} - 1 \leq x \leq 1 - \frac{k}{2} \text{ (εφόσον } k \geq 0)$

Έχουμε λοιπόν, $f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{k}{2} - 1 \leq x \leq 1 - \frac{k}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Λόγω συνεχούς κατανομής υπό την H_0 ($f_0 \sim U(-1, 1)$, ομοιόμορφη), λαμβάνουμε $\gamma = 0$ και βρίσκουμε στη σταθερά k έτσι ώστε $P_{f_0}(\frac{k}{2} - 1 \leq X \leq 1 - \frac{k}{2}) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1 - \frac{k}{2} - (\frac{k}{2} - 1)}{2} = \alpha \Leftrightarrow 1 - \frac{k}{2} = \alpha \Leftrightarrow k = 2(1 - \alpha)$, δεκτή λύση επειδή $\alpha < 1$. Ε.Ε. μέγεθος α είναι

$f(x) = \begin{cases} 1, & -\alpha \leq x \leq \alpha \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ (Να εξηγήσετε τη σημασία του $f(x)$: γιατί δηλαδή η H_0 απορρίπτεται αν παρατηρηθεί τιμή της X σε περιοχή του μηδενός, $(-\alpha, \alpha)$;

#2. Βάσει του ορισμού, αρκεί να δείχθει ότι για $\theta_1 < \theta_2$, ο λόγος $\lambda(x) = \frac{f(x; \theta_2)}{f(x; \theta_1)}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως προς x , οπότε έχουμε ΜΑΠ ως προς την σ.σ. $T(X) = X$.

Έχουμε, για $\theta_1 < \theta_2$, $\lambda(x) = e^{\theta_2 - \theta_1} \cdot \left(\frac{1 + e^{-x + \theta_1}}{1 + e^{-x + \theta_2}} \right)^2$, οπότε αρκεί να δείχθει ότι η συνάρτηση

$\lambda^*(x) = \frac{1 + e^{-x + \theta_1}}{1 + e^{-x + \theta_2}} = \frac{e^x + \alpha}{e^x + \beta}$ είναι $\uparrow$, όπου $\alpha = e^{\theta_1} < e^{\theta_2} = \beta$.

Ο αριθμητής της παραγωγής της $\lambda^*(x)$ είναι $e^x(e^x + \beta) - (e^x + \alpha)e^x = (\beta - \alpha)e^x > 0$.

#5. (α) $\underline{X} = (X_1, X_2) \sim_{i.i.d.} P(\theta)$, επομένως $f(\underline{x}; \theta) = e^{-2\theta} \theta^{x_1 + x_2} / (x_1! x_2!)$

$H_0: \theta = 1 \quad H_1: \theta = 2$

$\lambda(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}; \theta_1)}{f(\underline{x}; \theta_0)} = e^{-2} \cdot 2^{x_1 + x_2}$, οπότε $\lambda(\underline{x}) \geq k \Leftrightarrow \ln(e^{-2} \cdot 2^{x_1 + x_2}) \geq \ln k \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq c$ (όπου $c = (\ln k + 2) / \ln 2$).

Η μορφή του Ι.Ε. είναι

$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X_1 + X_2 > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases}$ (Στη μορφή αυτή καταλήγουμε αμέσως αν
 λαμβούμε υπ όψη την ιδιότητα του ΜΜΠ, ω ς προς $T(X) = X_1 + X_2$ μέσω ΜΕΘΟΔΟΥ #)

(β) Ζητάμε, $\gamma \in [0, 1]$ και c , τέτοια ώστε $E_{\theta=1} \varphi(X) = 1 - e^{-2} \cdot \frac{19}{3} = (\Rightarrow) P_{\theta=1}(X_1 + X_2 > c) + \gamma P_{\theta=1}(X_1 + X_2 = c) = 1 - \frac{19}{3} e^{-2} > (1)$

Είναι $X_1 + X_2 \sim P(2\theta)$, άρα για $\theta = 1$ έχουμε $X_1 + X_2 \sim P(2)$ (χμς, ισχύει
 συνάρτηση πιθανότητας (πυκνότητα) $P_{\theta=1}(X_1 + X_2 = x) = e^{-2} \cdot \frac{2^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

(Δοκιμάζοντας με διαφορετικές τιμές $c = 0, 1, 2, 3, \dots$), παρατηρούμε ότι $P(X_1 + X_2 \leq 3) = (\sum_{x=0}^3 P(X_1 + X_2 = x)) = e^{-2} + e^{-2} \cdot 2 + e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} + e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} = \frac{19}{3} e^{-2}$.

Επομένως, η (i) ισχύει με $c = 3$ και $\gamma = 0$.

(γ) Όπως στο (β), ζητάμε $\gamma \in [0, 1]$ και c τέτοια ώστε $E_{\theta=1} \varphi(X) = 0.10$
 $(\Rightarrow) P_{\theta=1}(X_1 + X_2 \leq c) = 0.90 + \gamma P_{\theta=1}(X_1 + X_2 = c) \quad (2)$

Παρατηρούμε ότι για $c = 4$, $P_{\theta=1}(X_1 + X_2 \leq 4) = \sum_{x=0}^4 P_{\theta=1}(X_1 + X_2 = x) = 1 - e^{-2} (2 - 0.95) \rightarrow 0.90$. Συνεπώς η (2) ισχύει με $c = 4$ και

$\gamma = \frac{P_{\theta=1}(X_1 + X_2 \leq 4) - 0.90}{P_{\theta=1}(X_1 + X_2 = 4)} = \frac{7e^{-2} - 0.90}{e^{-2} \cdot \frac{2^4}{4!}} = \frac{7e^{-2} - 0.90}{\frac{2}{3}e^{-2}} \approx 0.09$.

Η X εντ ήμτ κατατάσσεται ως κατανομή ΜΜΠ.

(δ) Για $\theta > 0$, $\gamma > 0$ για το οποίο αν ισχύει, τότε $P_{\theta}(X_1 + X_2 \leq c) = 0.90$.

$X = (X)T$. ο.ε. ντν γων ως ΠΛΜ εχουσ

όπου $\gamma = \frac{1 + e^{-(\theta+x)}}{1 + e^{-(\theta+x-1)}} \cdot e^{-\theta} = (X)T$, $\theta > 0$ για $\gamma > 0$

$\gamma = \frac{1 + e^{-(\theta+x)}}{1 + e^{-(\theta+x-1)}} \cdot e^{-\theta} = (X)T$, $\theta > 0$ για $\gamma > 0$

$0 < \gamma(\theta - 1) = \gamma(\theta + 1) - (\gamma + 1) \cdot \gamma$ αν $\gamma > 0$ τότε $\gamma > 0$

$(\gamma, X) \sim (\theta, X) \Leftrightarrow \gamma = (\theta, X) \cdot T(X) = X(\theta)$

$\gamma = \frac{1 + e^{-(\theta+x)}}{1 + e^{-(\theta+x-1)}} \cdot e^{-\theta} = (X)T$

$(\gamma, X) \sim (\theta, X) \Leftrightarrow \gamma = (\theta, X) \cdot T(X) = X(\theta)$

Η X εντ ήμτ κατατάσσεται ως κατανομή ΜΜΠ.