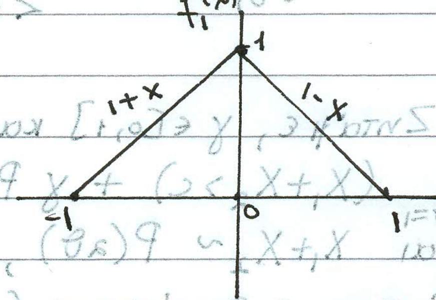
Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙΙ + (Λύσεις)

Οι #3, #4 έχουν λυθεί στην τάξη.



#1. $H_0: X\sim f_0$ κατά $H_1: X\sim f_1$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \lambda(x)>k\\ \gamma, & \lambda(x)=k\\ 0, & \lambda(x)<k\end{cases},\quad \text{όπου } \lambda(x)=\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$$

Άρα, $\lambda(x)=\begin{cases}2(1+x), & -1<x<0\\ 2(1-x), & 0<x<1.\end{cases}$

$\lambda(x)>k \iff 2(1+x)>k,\ -1<x\le 0$ ή $2(1-x)>k,\ 0<x<1 \iff \frac{k}{2}-1<x<0$ ή $0<x<1-\frac{k}{2} \iff \frac{k}{2}-1<x<1-\frac{k}{2}$ (εφ' όσον $k\ge 0$).

Έχουμε λοιπόν, $\varphi(x)=\begin{cases}1, & k/2-1<x<1-k/2\\ \gamma, & x=k/2-1 \text{ ή } x=1-k/2\\ 0, & x<k/2-1 \text{ ή } x>1-k/2\end{cases}$

Λόγω συνεχούς κατανομής υπό την H_0 ($f_0\sim U(-1,1)$, ομοιόμορφη), λαμβάνουμε $\gamma=0$ και βρίσκουμε τη σταθερά k έτσι ώστε $P_{f_0}(k/2-1<X<1-k/2)=\alpha \iff \frac{1-k/2-(k/2-1)}{2}=\alpha \iff 1-\frac{k}{2}=\alpha \iff k=2(1-\alpha)$, δεκτή λύση επειδή $\alpha<1$. Ο Ι.Ε. μεγέθους α είναι

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & -\alpha<x<\alpha\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

(Να εξηγήσετε τη σημασία του $\varphi(X)$: γιατί δηλαδή η H_0 απορρίπτεται αν παρατηρηθεί τιμή της X σε περιοχή του μηδενός, $(-\alpha,\alpha)$;)

#2. Βάσει του ορισμού, αρκεί να δειχθεί ότι για $\theta_1<\theta_2$, ο λόγος $\lambda(x)=\frac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως προς x, οπότε έχουμε ΜΛΠ ως προς την σ.σ. $T(X)=X$.

Έχουμε, για $\theta_1<\theta_2$, $\lambda(x)=e^{\theta_2-\theta_1}\cdot\left(\frac{1+e^{-x+\theta_1}}{1+e^{-x+\theta_2}}\right)^2$, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$\lambda^*(x)=\frac{1+e^{-x+\theta_1}}{1+e^{-x+\theta_2}}=\frac{e^x+\alpha}{e^x+\beta}$$ είναι $\uparrow$, όπου $\alpha=e^{\theta_1}<e^{\theta_2}=\beta$.

Ο αριθμητής της παραγώγου της $\lambda^*(x)$ είναι $e^x(e^x+\beta)-(e^x+\alpha)e^x=(\beta-\alpha)e^x>0$.

#5. (α) $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2)\ \underset{\text{α.ι.}}{\sim}\ P(\theta)$, επομένως $f(\underset{\sim}{x};\theta)=e^{-2\theta}\theta^{x_1+x_2}/(x_1!\,x_2!)$

$H_0: \theta=1 \quad H_1: \theta=2$

$\lambda(\underset{\sim}{x})=\frac{f(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{f(\underset{\sim}{x};\theta_0)}=e^{-2}\cdot 2^{x_1+x_2}$, οπότε $\lambda(\underset{\sim}{x})>k \iff \ln(e^{-2}\cdot 2^{x_1+x_2})>\ln k$

$\iff x_1+x_2>c$ (όπου $c=(\ln k+2)/\ln 2$).

Η μορφή του Ι.Ε. είναι