

### Ασκήσεις IV +

1. Δίνεται δείγμα  $\underline{X} = (X_1, X_2)$ , όπου  $X_1$  και  $X_2$  ανεξάρτητες με  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$  και  $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 9\theta^2)$ ,  $\theta > 0$ . Να κατασκευασθεί ο ελπ μεγέθους  $\alpha$  για το πρόβλημα  $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$  κατά  $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ . (Να υπολογισθούν και οι σχετικές σταθερές.)
  2. Έστω  $X_1$  και  $X_2$  ανεξάρτητες παρατηρήσεις με  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$  και  $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ . Για τον έλεγχο της  $\mathcal{H}_0 : \sigma_2 = 3\sigma_1$  κατά  $\mathcal{H}_1 : \sigma_2 \neq 3\sigma_1$ , η  $\mathcal{H}_0$  απορρίπτεται όταν  $X_2^2/X_1^2 > c_2$  ή  $X_2^2/X_1^2 < c_1$ , όπου  $c_1 < c_2$  είναι θετικές σταθερές. Πώς θα υπολογίζατε τα  $c_1$  και  $c_2$  έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος  $\alpha$ ;
  3. Δίνονται ανεξάρτητες παρατηρήσεις  $X_1 \sim \mathcal{E}(\theta)$  και  $X_2 \sim \mathcal{E}(\theta/2)$ ,  $\theta > 0$ . Να δειχθεί ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφαιών (ελπ) για το πρόβλημα  $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$  κατά  $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$  απορρίπτει την  $\mathcal{H}_0$  όταν  $X_1 + 2X_2 < c_1$  ή  $X_1 + 2X_2 > c_2$ .
  4. Έλεγχος έχει τιμή p (p-value) 0.043. Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 0.05$ ; Ποια απόφαση θα λαμβάνατε σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 0.01$ ;
  5. Δίνεται δείγμα  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  από ανεξάρτητες παρατηρήσεις με κατανομές  $X_i \sim \mathcal{N}(\theta + i, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Να κατασκευασθεί ο ελπ μεγέθους  $\alpha$  για το πρόβλημα  $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$  κατά  $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0$ .
  6. Δίνεται τυχαίο δείγμα  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  από την κατανομή με πυκνότητα  $f_1(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(x-1)}$ ,  $x \geq 1$ ,  $\theta > 0$ . Να κατασκευασθεί ο ελπ μεγέθους  $\alpha$  για το πρόβλημα  $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$  κατά  $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ .
  7. Εταιρεία διαθέτει στην αγορά καρότα συσκευασμένα σε σάκκους. Ας υποθέσουμε ότι το βάρος  $X$  σε κιλά ενός σάκκου ακολουθεί  $\mathcal{N}(\theta, 9)$ . Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι κατά μέσο όρο οι σάκκοι έχουν βάρος  $25\text{Kgr}$ . Σε τυχαίο δείγμα 9 σάκκων τα βάρη των βρέθηκαν ότι είναι: 22.24, 24.80, 26.42, 25.40, 23.60, 24.40, 26.10, 24.20, 25.70. Με βάση αυτά τα δεδομένα και σε επίπεδο  $\alpha = 5\%$ , ευσταθεί ο ισχυρισμός της εταιρείας;
  8. Πλαστικό υλικό υψηλής αντοχής κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές διαδικασίες. Οι ακόλουθες μετρήσεις παριστάνουν το μέγιστο φορτίο (σε χιλιάδες  $\text{Kgr}$ ) ανά τετραγωνική ίντσα που άντεξε το υλικό σε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους 6 από κάθε διαδικασία:

Μέθοδος (διαδικασία) 1	Μέθοδος (διαδικασία) 2
$X$ (μέγιστο φορτίο)	$Y$ (μέγιστο φορτίο)
15.3, 18.7, 22.3, 17.6, 19.1, 14.8	21.2, 22.4, 18.3, 19.3, 17.1, 27.7
- Ας υποθέσουμε ότι  $X \sim \mathcal{N}(\theta_1, \sigma^2)$  και  $Y \sim \mathcal{N}(\theta_2, \sigma^2)$ . Σε επίπεδο  $\alpha = 5\%$  παρέχουν τα δεδομένα αυτά ένδειξη ότι δεν υπάρχει διαφορά στις δύο διαδικασίες κατασκευής όσον αφορά το μέσο μέγιστο φορτίο που μπορούν να αντέξουν;

