Ασκήσεις IV +

1. Δίνεται δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$, όπου X_1 και X_2 ανεξάρτητες με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 9\theta^2)$, $\theta > 0$. Να κατασκευασθεί ο ελπ μεγέθους α για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$. (Να υπολογισθούν και οι σχετικές σταθερές.)

2. Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες παρατηρήσεις με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Για τον έλεγχο της $\mathcal{H}_0 : \sigma_2 = 3\sigma_1$ κατά $\mathcal{H}_1 : \sigma_2 \neq 3\sigma_1$, η $\mathcal{H}_0$ απορρίπτεται όταν $X_2^2/X_1^2 > c_2$ ή $X_2^2/X_1^2 < c_1$, όπου $c_1 < c_2$ είναι θετικές σταθερές. Πώς θα υπολογίζατε τα c_1 και c_2 έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α;

3. Δίνονται ανεξάρτητες παρατηρήσεις $X_1 \sim \mathcal{E}(\theta)$ και $X_2 \sim \mathcal{E}(\theta/2)$, $\theta > 0$. Να δειχθεί ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών (ελπ) για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ απορρίπτει την $\mathcal{H}_0$ όταν $X_1 + 2X_2 < c_1$ ή $X_1 + 2X_2 > c_2$.

4. Έλεγχος έχει τιμή p (p-value) 0.043. Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$; Ποια απόφαση θα λαμβάνατε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.01$;

5. Δίνεται δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από ανεξάρτητες παρατηρήσεις με κατανομές $X_i \sim \mathcal{N}(\theta + i, 1)$, $i = 1, \ldots, n$. Να κατασκευασθεί ο ελπ μεγέθους α για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0$.

6. Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $f_1(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(x-1)}$, $x \geq 1$, $\theta > 0$. Να κατασκευασθεί ο ελπ μεγέθους α για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$.

7. Εταιρεία διαθέτει στην αγορά καρότα συσκευασμένα σε σάκκους. Ας υποθέσουμε ότι το βάρος X σε κιλά ενός σάκκου ακολουθεί $\mathcal{N}(\theta, 9)$. Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι κατά μέσο όρο οι σάκκοι έχουν βάρος $25Kgr$. Σε τυχαίο δείγμα 9 σάκκων τα βάρη των βρέθηκαν ότι είναι: $22.24, 24.80, 26.42, 25.40, 23.60, 24.40, 26.10, 24.20, 25.70$. Με βάση αυτά τα δεδομένα και σε επίπεδο $\alpha = 5\%$, ευσταθεί ο ισχυρισμός της εταιρείας;

8. Πλαστικό υλικό υψηλής αντοχής κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές διαδικασίες. Οι ακόλουθες μετρήσεις παριστάνουν το μέγιστο φορτίο (σε χιλιάδες Kgr) ανά τετραγωνική ίντσα που άντεξε το υλικό σε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους 6 από κάθε διαδικασία:

Μέθοδος (διαδικασία) 1	Μέθοδος (διαδικασία) 2
X (μέγιστο φορτίο)	Y (μέγιστο φορτίο)
$15.3, 18.7, 22.3, 17.6, 19.1, 14.8$	$21.2, 22.4, 18.3, 19.3, 17.1, 27.7$

Ας υποθέσουμε ότι $X \sim \mathcal{N}(\theta_1, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\theta_2, \sigma^2)$. Σε επίπεδο $\alpha = 5\%$ παρέχουν τα δεδομένα αυτά ένδειξη ότι δεν υπάρχει διαφορά στις δύο διαδικασίες κατασκευής όσον αφορά το μέσο μέγιστο φορτίο που μπορούν να αντέξουν;

9. Δίνονται ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1 και X_2 με κατανομές, αντίστοιχα,

$$f_1(x_1;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2}, \quad f_2(x_2;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_2-4\theta)^2}, \quad x_1, x_2, \theta \in \mathbb{R}.$$

α) Να δειχθεί ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0$ απορρίπτει την $\mathcal{H}_0$ όταν $|X_1 + 4X_2| > c$.

β) Να υπολογισθεί η σταθερά c έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, με $\alpha \in (0,1)$.

10. Δίνονται ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1 και X_2 με κατανομές, αντίστοιχα,

$$f_1(x_1;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2}, \quad f_2(x_2;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_2-\theta-1)^2}, \quad x_1, x_2, \theta \in \mathbb{R}.$$

α) Να δειχθεί ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0$ απορρίπτει την $\mathcal{H}_0$ όταν $|X_1 + X_2 - 1| > c$.

β) Να υπολογισθεί η σταθερά c (ως συνάρτηση ποσοστιαίου σημείου γνωστής κατανομής) έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, με $\alpha \in (0,1)$.

11. Δίνονται ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1, X_2 και X_3, με κατανομές αντίστοιχα, $\mathcal{N}(\theta, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\theta+1, \sigma_2^2)$ και $\mathcal{N}(\theta+2, \sigma_3^2)$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ και $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$ είναι γνωστές θετικές σταθερές.

α) Να δειχθεί ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0$ απορρίπτει την $\mathcal{H}_0$ όταν $|\frac{X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2 - 1}{\sigma_2^2} + \frac{X_3 - 2}{\sigma_3^2}| > c$.

β) Να υπολογισθεί η σταθερά c (ως συνάρτηση ποσοστιαίου σημείου γνωστής κατανομής) έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, με $\alpha \in (0,1)$.

12. Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα

$$f_1(x;\theta) = \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^3}{3\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

α) Να δειχθεί ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών, $\phi(\underset{\sim}{X})$, απορρίπτει την μηδενική υπόθεση $\mathcal{H}_0 : \theta = 2/3$, έναντι της εναλλακτικής $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 2/3$, όταν $\sum_{i=1}^n X_i^3 < c_1$ ή $\sum_{i=1}^n X_i^3 > c_2$, για κάποιες σταθερές c_1 και c_2.

β) Υπολογίστε τις σταθερές c_1 και c_2, έτσι ώστε ο $\phi(\underset{\sim}{X})$ να έχει μέγεθος α.
(Υπόδειξη: βρείτε την κατανομή της $Y = X^3$.)