

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Ασκήσεις IV

#1. Να υπολογιστούν $\text{Cov}(X, Y)$, $\rho_{X,Y}$ και $\text{Var}(3X - 5Y + 2)$ όταν η από κοινού πυκνότητα των X, Y δίνεται από τους τύπους

α. $f(x, y) = \frac{1}{2x}$, $0 < y < x < 2$
 $= 0$, αλλού,

β. $f(x, y) = x + y$, $0 < x, y < 1$
 $= 0$, αλλού,

γ. $f(x, y) = e^{-y}$, $x > 0, y > x$ (Απαντήσεις: $\text{Cov}(X, Y) = 1$,
 $= 0$, αλλού. $\rho_{X,Y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{Var}(3X - 5Y + 2) = 29$)

#2. Να υπολογιστούν $\text{Var}(X - Y)$ και $\rho_{X,Y}$ στις εξής περιπτώσεις:

α. Η X παριστάνει το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης τριμερούληπτου (τέτλειου) ζαριού και η Y το άθροισμα των δύο πρώτων ρίψεων

β. Η X παριστάνει τον αριθμό ^{των} επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, με πιθανότητες επιτυχίας p , και η Y τον αριθμό των αποτυχιών.

γ. Το ζεύγος (X, Y) έχει ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{(-a, a), (a, a), (a, -a), (-a, -a)\}$ όπου a θετικός αριθμός (σημ. ομοιόμορφη σημαίνει ότι: ... καθένα από τα 4 ζεύγη έχει την ίδια πιθανότητα)

#3. Έστω X, Y, Z αλληλοεξάρτητες ανά δύο τ.μ. με $\text{Var}(X) = 3$, $\text{Var}(Y) = 4$ και $\text{Var}(Z) = 3$. Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης (μεταξύ) των $U = X + Y$ και $V = Y + Z$.

#4. Οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με εκθετική κατανομή. Θέτουμε $U = X + Y$ και $V = Y + Z$. Να δείχθεί ότι $\rho_{U,V} = \frac{1}{2}$.

#5. Αν $\text{Var}(X) = 9$, $\text{Var}(Y) = 25$ και $\rho_{X,Y} = \frac{1}{2}$ να υπολογιστεί $\text{Var}(-X - 2Y + 2)$.

#6. Να δείχθει ότι δεν υπάρχουν τ.μ. X και Y , τέτοιες ώστε $\text{Var}(X)=4$, $\text{Var}(Y)=5$ και $\text{Cov}(X,Y)=\sqrt{21}$.

#7. Αν X και Y είναι τ.μ. με $E(X)=E(Y)=0$, να δείχθει ότι $[E(XY)]^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$. (Ισχύει και χωρίς την συνθήκη $E(X)=E(Y)=0$)

#8. Έστω $X_n, n=1,2,\dots$ μία ακολουθία τ.μ. με την ίδια διασπορά, σ².

α. Αν οι X_1, X_2, X_3 έχουν ανά δύο τον ίδιο συντελεστή συσχέτισης, ρ , να δείχθει ότι $\rho \geq -\frac{1}{2}$. (Υπόδ.: $\text{Var}(X_1+X_2+X_3) \geq 0$)

β. Αν οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ έχουν ανά δύο τον ίδιο συντελεστή συσχέτισης, ρ , να δείχθει ότι $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$.

γ. Αν όλοι οι όροι της ακολουθίας $X_n, n=1,2,\dots$ έχουν ανά δύο τον ίδιο συντελεστή συσχέτισης, ρ , να δείχθει ότι $\rho \geq 0$.

(Το α, β, γ ισχύουν και χωρίς τη συνθήκη της κοινής διασποράς)

#9. Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες τ.μ. με $EY=4$ και $E(Y^2)=20$. Να υπολογιστεί η $\text{Cov}(3X+Y, Y+2Z)$.

#10. Έστω ότι οι τ.μ. X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \frac{1}{4}, \text{ αν } (x,y) = (-4,1), (4,-1), (2,2), (-2,-2) \\ = 0, \text{ αλλού}$$

Να δείχθει ότι είναι ασυσχέτιστες παρότι δεν είναι ανεξάρτητες.

#11. Έστω X_1 και X_2 διττές τ.μ., κάθε μία με τιμές 0 ή 1. Να δείχθει ότι οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν είναι ασυσχέτιστες. [Υπόδ.: $\text{Cov}(X_1, X_2)=0 \Rightarrow P(X_1=1, X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)$]

#12. Δίνονται τ.μ. X και Y με $EX=EY$ και $\text{Var}(X)=\text{Var}(Y)=1$. Να δείχθει ότι $\text{Var}(X+Y)=4$ αν και μόνον αν $P(X=Y)=1$. [Υπόδ.: Υπολογίστε $\text{Var}(X-Y)$]

#13. Να δείχθει ότι $\sqrt{\text{Var}(X+Y)} \leq \sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)}$, όπου X και Y τ.μ. (με πεπερασμένες διασπορές)

#14. Αν X είναι ο αριθμός των "επιτυχιών" σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα "επιτυχίας" p και Y ο αντίστοιχος αριθμός "αποτυχιών", να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των $2X+1, -Y+2$.