Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ – Λύσεις Ασκήσεις ΙΙΙ

$\boxed{\#1.}$ Θέτουμε $Z_1 = X_1 - \mu$, $Z_2 = (X_2 - \mu - 1)$, $Z_3 = X_3 - \mu - 2$. Τότε Z_1, Z_2, Z_3 είναι α.ι. $\sim N(0,1)$ και επομένως $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \sim \chi_3^2$.

$\boxed{\#3.}$ Θέτουμε $Z_i = \frac{i X_i}{\sigma}$, $i = 1,2,3$. Τότε Z_1, Z_2, Z_3 είναι α.ι. $\sim N(0,1)$ και $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{2X_2^2 + 3X_3^2}{2}}} = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2^2 + Z_3^2/2}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_2^2/2}} \sim t_2$, επειδή $Z_2^2 + Z_3^2 \sim \chi_2^2$ και Z_1, $Z_2^2 + Z_3^2$ είναι ανεξάρτητες

$\boxed{\#4.}$ Από τις ιδιότητες/παραγωγή της χι-τετράγωνο κατανομής, έχουμε $2\lambda_i X_i \sim \chi_2^2$, $i = 1,2,3$, οπότε λόγω ανεξαρτησίας $2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i X_i \sim \chi_6^2$.

$\boxed{\#5.}$ $\frac{X_1 + X_2}{2X_3} = \frac{2\lambda X_1 + 2\lambda X_2}{2 \cdot 2\lambda X_3} \sim \frac{\chi_4^2}{2\chi_2^2} = \frac{\chi_4^2/4}{\chi_2^2/2} \sim F_{4,2}$ λόγω ανεξαρτησίας των $X_1 + X_2$, X_3.

$\boxed{\#7.}$ $Y = \frac{\ln(X_1 X_2)}{\ln(X_3 X_4)} = \frac{\ln X_1 + \ln X_2}{\ln X_3 + \ln X_4} = \frac{-2\ln X_1 - 2\ln X_2}{-2\ln X_3 - 2\ln X_4}$. Επιπλέον,

$T_i = -2\ln X_i \sim \chi_2^2$ (εφαρμογή του τύπου μετασχηματισμού $T_i = g(X_i)$) και επομένως $Y = \frac{T_1 + T_2}{T_3 + T_4} \sim \frac{\chi_4^2}{\chi_4^2} = \frac{\chi_4^2/4}{\chi_4^2/4} \sim F_{4,4}$ λόγω της ανεξαρτησίας των $T_1 + T_2$, $T_3 + T_4$.

$\boxed{\#8.}$ Θέτουμε $X_i = F(Y_i)$, $i = 1, \dots, 4$, οπότε $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$ και $X_1, \dots, X_4$ είναι ανεξάρτητες. Τότε $\frac{\ln[F(Y_1)F(Y_2)]}{\ln[F(Y_3)F(Y_4)]} = \frac{\ln(X_1 X_2)}{\ln(X_3 X_4)}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από την #7.

$\boxed{\#10.}$ $\frac{X}{|Y|} = \frac{X}{\sqrt{Y^2}} = \frac{X/\sigma}{\sqrt{Y^2/\sigma^2}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_1^2}} \sim t_1$, λόγω ανεξαρτησίας των X, Y.

$\boxed{\#2.}$ Τυποποιώντας την X_i έχουμε $Z_i = \frac{\sqrt{i}\, X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$, $i = 1, \dots, \nu$ και επιπλέον $Z_1, \dots, Z_\nu$ είναι ανεξάρτητες ως συναρτήσεις των ανεξάρτητων $X_1, \dots, X_\nu$, αντίστοιχα. Άρα $Y = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 \sim \chi_\nu^2$. Θέτουμε $U = \sigma^2 Y$ και η Y έχει πυκνότητα $f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)\, 2^{\nu/2}} y^{\nu/2 - 1} e^{-y/2}$, $y > 0$. Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο μετασχηματισμού $f_U(u) = f_Y\left(\frac{u}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^2} =$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu/2)\, 2^{\nu/2}} \left(\frac{u}{\sigma^2}\right)^{\nu/2 - 1} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)(2\sigma^2)^{\nu/2}} u^{\nu/2 - 1} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}, \quad u > 0,$$

που είναι η πυκνότητα της $G\left(\frac{\nu}{2}, 2\sigma^2\right)$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε βρίσκοντας την ροπογεννήτρια της U.

$\boxed{\#6.}$ (α) χ_n^2 (β) $Y = \frac{\kappa (X_1^2 + \dots + X_n^2)}{n (X_{n+1}^2 + \dots + X_{n+\kappa}^2)} = \frac{(X_1^2 + \dots + X_n^2)/(n\sigma^2)}{(X_{n+1}^2 + \dots + X_{n+\kappa}^2)/(\kappa\sigma^2)} \sim \frac{\chi_n^2/n}{\chi_\kappa^2/\kappa}$

$\sim F_{n,\kappa}$ (λόγω ανεξαρτησίας αριθμητή και παρονομαστή)

Ο, (γ), (δ), (ε) έχουν λυθεί στην τάξη.

$\boxed{\#11.}$ $\frac{X}{\sqrt{Y_1 + Y_2}} = \frac{X/\sqrt{2}}{\sqrt{2(Y_1 + Y_2)/4}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\chi_4^2/4}} \sim t_4$, επειδή $2(Y_1 + Y_2) \sim G(\alpha = 2, \beta = 2) \sim \chi_4^2$ λόγω ανεξαρτησίας των Y_1, Y_2.