# Μιγαδική Ανάλυση

Σ. Αναστασίου και Β.Βλάχου

## Ασκήσεις στο θεώρημα ταυτισμού

1. Να δείξετε ότι αν $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f(z)g(z) = 0$, τότε μία από τις δύο συναρτήσεις είναι ταυτοτικώς μηδέν.
2. Να δείξετε ότι $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,\ \forall z \in \mathbb{C}$.
(Παρατήρηση: Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύουν όλοι οι τριγωνομετρικοί τύποι και στο μιγαδικό επίπεδο.)
3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $f(z)$ τέτοια ώστε:
$$f\left(\tfrac{1}{2n}\right) = \tfrac{1}{2n},\ n \geq 1 \text{ και } f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{9}.$$
4. Έστω $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Να δείξετε ότι η ισότητα
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n+1}$$
μπορεί να ισχύει το πολύ για πεπερασμένους το πλήθος φυσικούς αριθμούς.
5. Να βρεθεί για ποιους μιγαδικούς αριθμούς $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ τέτοια, ώστε:
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+a},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
6. Να βρείτε τις συναρτήσεις εκείνες $f, g$ που είναι αναλυτικές στον δίσκο $D(0,1)$ και ικανοποιούν τις ισότητες:
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^5}{1+n^5},\quad g\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{n^5}{1+n^5},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
7. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στον δίσκο $D(0,1)$ και
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Υπολογίστε την τιμή $f(\frac{\pi}{4})$.
8. Οι συναρτήσεις $f(z),\ g(z)$ είναι αναλυτικές στον δίσκο $D(0,1)$ και ακόμα $f(z), g(z) \neq 0,\ \forall z \in D(0,1)$. Υποθέτουμε ότι:
$$\frac{f'(\frac{1}{n})}{f(\frac{1}{n})} = \frac{g'(\frac{1}{n})}{g(\frac{1}{n})},\ n \geq 1.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z) = cg(z),\ \forall z \in D(0,1)$.

9. Για ποιες ακέραιες συναρτήσεις ισχύει ότι $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \in \mathbb{N}$ και $f(0) = 5$;

10. Έστω $(a_n)_n$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει. Αν
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^{-n} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N},$$
να αποδείξετε ότι $a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.