

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Λύσεις Ασκήσεων II

#2. $f_X(x) = 1, 0 < x < 1$ και $f_X(x) = 0, x \notin (0, 1)$, $Y = -2 \ln X = g(X)$
 $\Delta = \{x : f_X(x) > 0\} = (0, 1)$, $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -2 \ln x$ και $g(\Delta) = (0, \infty)$.
 $g'(x) = -\frac{2}{x} \neq 0 \forall x \in \Delta$. Για $y \in g(\Delta)$, $y = -2 \ln x \Rightarrow x = e^{-y/2} = g^{-1}(y)$ και
 $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -\frac{1}{2} e^{-y/2}$. Επομένως, $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = 1 \cdot \frac{1}{2} e^{-y/2}, y > 0$,
 δηλαδή $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda = 2$ ή $Y \sim \mathcal{G}(\alpha=1, \beta=2) \sim \chi^2_2$.

#3. $f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, 0 < x < 1$ και $f_X(x) = 0, x \notin (0, 1)$, $Y = 1-X = g(X)$
 $\Delta = (0, 1)$, $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 1-x$ και $g(\Delta) = (0, 1)$, $g'(x) = -1 \neq 0 \forall x \in \Delta$.
 Για $y \in g(\Delta)$, $y = 1-x \Rightarrow x = 1-y = g^{-1}(y)$ και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -1$. Επομένως, $f_Y(y) =$
 $= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} f_X(1-y) \cdot 1 = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} = \frac{1}{B(\beta, \alpha)} y^{\beta-1} (1-y)^{\alpha-1},$
 $y \in (0, 1)$. Άρα $Y \sim \text{Beta}(\beta, \alpha)$.

#4. $\Delta = (0, \theta)$, $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x/\theta$ έχει $g'(x) = 1/\theta \neq 0 \forall x \in \Delta$ και
 $g(\Delta) = (0, 1)$. Για $y \in g(\Delta)$, $y = x/\theta \Rightarrow x = \theta y = g^{-1}(y)$ με $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \theta$. Επο-
 μένως, $f_Y(y) = f_X(\theta y) \cdot |\theta| = n(\theta y)^{n-1} / \theta^n \cdot \theta = n y^{n-1}, 0 < y < 1$.

#5. $f_X(x) = \frac{1}{\pi}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\Delta = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Η $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \tan x$ έχει
 $g'(x) = 1/\cos^2 x \neq 0 \forall x \in \Delta$ και $g(\Delta) = \mathbb{R}$. Για $y \in \mathbb{R}$, $y = \tan x \Rightarrow x = \arctan y =$
 $= g^{-1}(y)$ και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{1+y^2}$. Επομένως, $f_Y(y) = f_X(\arctan y) \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, y \in \mathbb{R}$.

#6. $\Delta = (0, \infty)$ και η $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^\alpha$ έχει $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0 \forall x \in \Delta$ και
 $g(\Delta) = (0, \infty)$. Για $y \in g(\Delta)$, $y = x^\alpha \Rightarrow x = y^{1/\alpha} = g^{-1}(y)$ με $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{\alpha} y^{1/\alpha-1}$. Επομένως,
 $f_Y(y) = f_X(y^{1/\alpha}) \left| \frac{1}{\alpha} y^{1/\alpha-1} \right| = \lambda \alpha (y^{1/\alpha})^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\alpha} y^{1/\alpha-1} = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0 \Rightarrow Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

#7. $\Delta = (a, \infty)$ και η $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln(x/a)$ έχει $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \forall x \in \Delta$
 και $g(\Delta) = (0, \infty)$ επειδή $x > a \Leftrightarrow \ln x > \ln a \Leftrightarrow \ln(x/a) > 0$. Για $y \in g(\Delta)$, $y = \ln \frac{x}{a} \Rightarrow$
 $x = a e^y = g^{-1}(y)$ και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = a e^y$. Επομένως, $f_Y(y) = f_X(a e^y) |a e^y| =$
 $= \lambda a^\lambda (a e^y)^{-\lambda-1} a e^y = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0$, δηλαδή $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

#8. $\Delta = (-a, a)$ και η $g: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$ δεν παραχωρίζεται στο
 $x=0$. Άρα δεν εφαρμόζεται ο σχετικός τύπος για την εύρεση της κατανομής της $Y = |X|$.

Επομένως, θα υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της Y και η πυκνότητα της θα προ-
 κύψει με παραχώριση της σ.κ. Έχουμε $\Delta = [0, a)$ και για $y \in (0, a)$ $F_Y(y) = P(Y \leq y)$
 $= P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq -y) = F_X(y) - F_X(-y)$. Άρα
 $F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y), 0 < y < a, F_Y(y) = 0, y < 0$ και $F_Y(y) = 1, y > a$, οπότε
 $f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}, 0 < y < a$ και $f_Y(y) = 0$ για $y < 0$ ή $y > a$.
 Επομένως, $Y \sim \mathcal{U}(0, a)$.

#9. Η Y είναι διακριτή με τιμές -1 και 1 . Αρκεί λοιπόν να βρεθούν οι πιθανότητες αυτών των τιμών ή, επειδή το άθροισμα τους είναι 1 , αρκεί να βρεθεί η πιθανότητα της μιας εξ' αυτών. $P(Y=-1) = P(X \geq EX) = P(X \geq \frac{1}{\lambda}) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} = e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e^{-1}$, και επομένως $P(Y=1) = 1 - e^{-1}$.

#10. Όπως στην #8, θα υπολογιστεί πρώτα η συνάρτηση κατανομής. $\Delta = [0, \infty)$ και για $y \in (0, \infty)$, όπως στην #8, $F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y)$ και $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$.

#12. Όπως στην #10, $\Delta = (-\infty, \infty)$, $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$ έχει $g'(x) = 2x$ με $g'(0) = 0$, άρα δεν εφαρμόζεται ο γνωστός τύπος. Έχουμε $g(\Delta) = [0, \infty)$ και για $y \in (0, \infty)$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ και $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y}-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}(y+1)^2}$.

#11. Ειδική περίπτωση της #12 με $\mu=0$. (Έχει δειχθεί και στις παραδόσεις του μαθήματος ως βασική ιδιότητα της $N(0,1)$.)

#13. $\Delta = (0, \infty)$ και η $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{2} \omega x^2$ έχει $g'(x) = \omega x \neq 0 \forall x \in \Delta$ και $g(\Delta) = (0, \infty)$. Για $y \in (0, \infty)$, $y = \frac{1}{2} \omega x^2 \Rightarrow x = (2y/\omega)^{1/2} = g^{-1}(y)$ και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = (\frac{2}{\omega})^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\omega y}}$. Επομένως, για $y > 0$ $f_Y(y) = f_X((2y/\omega)^{1/2}) \left| (\frac{2}{\omega})^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}} \frac{2y}{\omega} e^{-\frac{\omega y}{2}} (\frac{2}{\omega})^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}) \omega^{3/2} y^{1/2}} e^{-\frac{\omega y}{2}} \sim G(\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \omega) \left(\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \right)$.

#14. Έστω X ο αριθμός των κερδοφόρων επαναλήψεων μεταξύ των n , οπότε $X \sim B(n, p = \frac{1}{5})$, Διωνυμική. Τότε ο αριθμός των ^{επανεπενδύσεων} επαναλήψεων είναι $n - X$ και το "κέρδος" (κεφάλαιο) του παίκτη είναι $Y = 20X - 5(n - X) = 25X - 5n$.

Η τ.μ. Y είναι διακριτή με σύνολο τιμών $S_Y = \{y: y = 25x - 5n, x = 0, 1, 2, \dots, n\}$ και για $y \in S_Y$, $f_Y(y) = P(Y=y) = P(25X - 5n = y) = P(X = \frac{y+5n}{25})$. $\frac{y+5n}{25}$ Διωνυμικές π.δ.

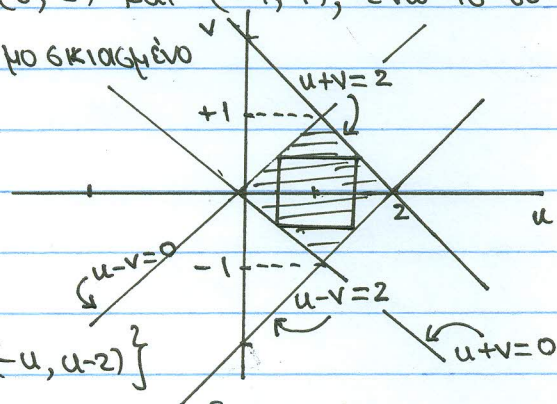
#19. $\Delta = (0, \infty)$ και η $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$ έχει $g'(x) = 2x \neq 0 \forall x \in \Delta$. Έχουμε $g(\Delta) = (0, \infty)$ και για $y \in (0, \infty)$, $y = x^2 \Rightarrow x = y^{1/2} = g^{-1}(y)$ και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Άρα $f_Y(y) = f_X(y^{1/2}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = 2\lambda y^{1/2} e^{-\lambda y} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0 \Rightarrow Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

#20. β. Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ (πεπερασμένο ή αριθμήσιμο) το σύνολο τιμών της X και $p_i = P(X=x_i)$, $i=1,2,\dots$. Τότε η τ.μ. $Y = F(X)$ έχει σύνολο τιμών $S_Y = \{F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n), \dots\}$. Επομένως για $y_i = F(x_i)$ έχουμε $f_Y(y_i) = P(Y=y_i) = P(F(X) = F(x_i)) = P(x_i \leq X < x_{i+1}) = P(X=x_i) = p_i$. Επιπλέον, από τον ορισμό της σ.κ. διακριτής τ.μ. έχουμε: $F(x_1) = p_1$, $F(x_2) = p_1 + p_2$, $\dots$, $F(x_n) = p_1 + \dots + p_n$, $\dots$. Άρα η $Y = F(X)$ είναι διακριτή με τιμές $p_1, p_1+p_2, p_1+p_2+p_3, \dots, p_1+\dots+p_n, \dots$ και αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$. [εχόλιο: Αν η F είναι συνεχής, τότε $Y = F(X) \sim U(0,1)$.] Η άσκηση #20 υποδηλώνει ότι η συνέχεια της F είναι αναγκαία συνθήκη ώστε $F(X) \sim U(0,1)$.

#18. (Εισαγωγή βοηθητικής μεταβλητής) Θέτουμε $U = X$, $V = XY$. Το σύνολο τιμών του ζεύγους (X, Y) είναι $\Delta = (0, 1) \times (0, 1)$ και το σύνολο τιμών του (U, V) επίσης $(0, 1) \times (0, 1)$. Για $(u, v) \in (0, 1) \times (0, 1)$ το σύστημα $u = x$, $v = xy$ έχει λύση ως προς (x, y) την $x = u$, $y = \frac{v}{u}$ με Ιακωβιανή $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u} \neq 0$. Άρα, $f_{u,v}(u, v) = f_{x,y}(u, \frac{v}{u}) |J| = 4u \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{u} = 4 \frac{v}{u}$. Επομένως, η πυκνότητα της V θα βρεθεί $\int_{x,y} \delta_{x,y} \delta_{x,y} f_{x,y}(u, v)$ ως προς u και για (σταθερό) $v \in (0, 1)$. Άρα $f_v(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{u,v}(u, v) du = \int_0^1 4 \frac{v}{u} du = 4v \ln u \Big|_0^1 = -4v \ln v$. (Τα άκρα ολοκλήρωσης ως προς u : είναι $0 < u < 1$ και $0 < y = \frac{v}{u} < 1$, οπότε $0 < u < 1$, $0 < v < u$, δηλαδή $v < u < 1$.)

#17. $f_{x,y}(x, y) = f_x(x) f_y(y) = 1 \cdot 1 = 1$, $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ και $f_{x,y}(x, y) = 0$ αλλού. Το σύνολο τιμών του ζεύγους (X, Y) είναι το $\Delta = (0, 1) \times (0, 1)$. Το σύστημα $u = x+y$, $v = x-y$ έχει λύση ως προς (x, y) την $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ με Ιακωβιανή $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$. Επομένως, $f(u, v) = f_{x,y}(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) |J| = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ για $(u, v) \in S_{u,v} = \{(u, v) : 0 < \frac{u+v}{2} < 1, 0 < \frac{u-v}{2} < 1\} = \{(u, v) : 0 < u+v < 2, 0 < u-v < 2\}$. Τα σύνολα τιμών των u και v είναι, αντίστοιχα, $(0, 2)$ και $(-1, 1)$, ενώ το σύνολο τιμών του ζεύγους (u, v) , $S_{u,v}$, είναι το γραφιοδιαγράμμο χωρίο.

Πυκνότητα της u : για $u \in (0, 2)$, σταθερό, $0 < u+v < 2$
 $\Rightarrow -u < v < 2-u$, και $0 < u-v < 2 \Rightarrow u-2 < v < u$. Άρα,
 $\max(-u, u-2) < v < \min(2-u, u)$, οπότε



$$f_u(u) = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} (v_2 - v_1) = \frac{1}{2} \{ \min(2-u, u) - \max(-u, u-2) \}$$

$= \begin{cases} u, & 0 < u \leq 1 \\ 2-u, & 1 < u < 2 \end{cases}$ (Τα άκρα ολοκλήρωσης μπορούν να προσδιοριστούν και γεωμετρικά από το σχήμα.)

Πυκνότητα της v : για $v \in (-1, 1)$, σταθερό, $0 < u+v < 2 \Rightarrow -v < u < 2-v$, και $0 < u-v < 2 \Rightarrow v < u < 2+v$. Άρα, $u_1 = \max(-v, v) < u < \min(2-v, 2+v) = u_2$, οπότε

$$f_v(v) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) = \frac{1}{2} \{ \min(2-v, 2+v) - \max(-v, v) \} = \frac{1}{2} \{ \min(2-v, 2+v) - |v| \}$$

$= \begin{cases} 1+v, & -1 < v \leq 0 \\ 1-v, & 0 < v < 1 \end{cases}$. (ή γεωμετρικά όπως και για την u)

Για την κατανομή της $U_1 = X/Y$ εισάγουμε βοηθητική μεταβλητή $V_1 = Y$ και βρούμε $f_{u_1,v_1}(u_1, v_1) = v_1$, $0 < v_1 < 1$ και $0 < u_1 v_1 < 1$. Άρα $f_{u_1}(u_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{u_1,v_1}(u_1, v_1) dv_1 = \int_0^{\min(1, \frac{1}{u_1})} v_1 dv_1 = \frac{1}{2} [\min(1, \frac{1}{u_1})]^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < u_1 < 1 \\ \frac{1}{2u_1^2}, & u_1 \geq 1 \end{cases}$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = E U_1 = \int u_1 f_{u_1}(u_1) du_1 = \int_0^1 \frac{1}{2} u_1 du_1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{2} u_1 \frac{1}{u_1^2} du_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 u_1 du_1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{u_1} du_1 = \infty.$$

(άλλος τρόπος: $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{y} dy = \infty$)