Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙΙ

#1. Αν οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες με κατανομές $X_1 \sim N(\mu, 1)$, $X_2 \sim N(\mu+1, 1)$, $X_3 \sim N(\mu+2, 1)$, να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $(X_1-\mu)^2+(X_2-\mu-1)^2+(X_3-\mu-2)^2$.

#2. Αν οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_\nu$ είναι ανεξάρτητες με κατανομές $X_i \sim N(0, \sigma^2/i)$, $i=1,\ldots,\nu$ να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{i X_i^2}{\sigma^2}$ και ακολούθως η πυκνότητα της τ.μ. $\sigma^2 Y$.

#3. Θεωρούμε τις τ.μ. $X_1, \ldots, X_\nu$, $\nu \geq 3$, της άσκησης #2. Να δειχθεί ότι:

α. $\dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{2X_2^2+3X_3^2}{2}}} \sim t_2$, β. $2 \cdot \dfrac{X_1^2}{2X_2^2+3X_3^2} \sim F_{1,2}$

γ. $\dfrac{(\nu-2)(X_1^2+2X_2^2)}{2(3X_3^2+\cdots+\nu X_\nu^2)} \sim F_{2,\nu-2}$.

#4. Αν οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες με κατανομές $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$, $X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda_3)$ να δειχθεί ότι $2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i X_i \sim \chi^2_6$.

#5. Αν οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με (κοινή) κατανομή $\mathcal{E}(\lambda)$, να δειχθεί ότι $\dfrac{X_1+X_2}{2X_3} \sim F_{4,2}$. (Υπόδειξη: $2\lambda X_i \sim \chi^2_2$, $i=1,2,3$)

#6. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}$ α.ι. $\sim N(0,\sigma^2)$. Να βρεθούν οι κατανομές των τ.μ.

α) $(X_1^2+\cdots+X_n^2)/\sigma^2$ β) $\dfrac{k(X_1^2+\cdots+X_n^2)}{n(X_{n+1}^2+\cdots+X_{n+k}^2)}$ γ) $\dfrac{\sqrt{k}\, X_1}{\sqrt{X_{n+1}^2+\cdots+X_{n+k}^2}}$

δ) $n(\overline{X})^2/\sigma^2$, όπου $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, ε) $\dfrac{n(X_1-\overline{X})^2}{(n-1)\sigma^2}$ (Υπόδειξη για δ) και ε): να δειχθεί ότι $\overline{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ και $X_1-\overline{X} \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$)

#7. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 α.ι. $\sim \mathcal{U}(0,1)$ (ομοιόμορφη κατανομή). Να δειχθεί ότι η τ.μ. $\dfrac{\ln(X_1X_2)}{\ln(X_3X_4)}$ έχει κατανομή $F_{4,4}$. (Υπόδειξη: $-\ln X_i \sim \mathcal{E}(1)$ και $-2\ln X_i \sim \chi^2_2$, $i=1,\dots,4$)
(ln είναι ο νεπέριος λογάριθμος)

#8. (Γενίκευση της #7) Έστω Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 α.ι. με συνεχή κατανομή και συνάρτηση κατανομής $F(y)$. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $\dfrac{\ln[F(Y_1)F(Y_2)]}{\ln[F(Y_3)F(Y_4)]}$ έχει κατανομή $F_{4,4}$. (Υπόδειξη: από γνωστή πρόταση, $F(Y_i) \sim \mathcal{U}(0,1)$, $i=1,2,3,4$)

#9. (Θεωρία) Αν $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομές $\chi^2_{n_1}, \chi^2_{n_2}, \dots, \chi^2_{n_k}$, αντίστοιχα, τότε $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_n$, όπου $n = n_1+n_2+\dots+n_k$. (Δηλαδή, το άθροισμα ανεξάρτητων χι-τετράγωνο κατανομών είναι χι-τετράγωνο με βαθμούς ελευθερίας το άθροισμα των βαθμών ελευθερίας)

#10. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή κατανομή $N(0,\sigma^2)$, να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $\dfrac{X}{|Y|}$. (Υπόδειξη: $|Y| = \sqrt{Y^2}$ και $\dfrac{X}{|Y|} = \dfrac{X/\sigma}{\sqrt{Y^2/\sigma^2}}$)

#11. Αν $X \sim N(0,2)$, $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{E}(1)$ και X, Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες, να βρεθεί η κατανομή της $\dfrac{X}{\sqrt{Y_1+Y_2}}$