Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ, Λύσεις των Ασκήσεων Ι

$\boxed{\#1.}$ α. Διωνυμική, $M(t)=(pe^t+q)^n$, $q=1-p$.

$M'(t)=n(pe^t+q)^{n-1}\cdot pe^t$, $M''(t)=n(n-1)p^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2}+np(pe^t+q)^{n-1}e^t$.

Επομένως, $E(X)=M'(0)=n(p+q)^{n-1}\cdot p=np$, $E(X^2)=M''(0)=n(n-1)p^2+np$ και $Var(X)=E(X^2)-(EX)^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p)$.

$m(t)=\ln M(t)=n\ln(pe^t+q)$, $m'(t)=n\dfrac{pe^t}{pe^t+q}=n\dfrac{p}{p+qe^{-t}}$,

$m''(t)=\dfrac{npqe^{-t}}{(p+qe^{-t})^2}$. Επομένως, $E(X)=m'(0)=np$ και $Var(X)=m''(0)=npq$.

δ. Γάμμα, $M(t)=\dfrac{1}{(1-t\beta)^\alpha}$

$M'(t)=\dfrac{\alpha\beta}{(1-t\beta)^{\alpha+1}}$, $M''(t)=\dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta^2}{(1-t\beta)^{\alpha+2}}$. Επομένως, $E(X)=M'(0)=\alpha\beta$, $E(X^2)=M''(0)=\alpha(\alpha+1)\beta^2$ και $Var(X)=E(X^2)-(EX)^2=\alpha(\alpha+1)\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2$.

$m(t)=\ln M(t)=-\alpha\ln(1-t\beta)$, άρα $m'(t)=\dfrac{\alpha\beta}{1-t\beta}$, $m''(t)=\dfrac{\alpha\beta^2}{(1-t\beta)^2}$, οπότε $E(X)=m'(0)=\alpha\beta$, $Var(X)=m''(0)=\alpha\beta^2$.

Όμοια για τις περιπτώσεις (β) και (γ).

$\boxed{\#2.}$ Έχει λυθεί στην τάξη.

$\boxed{\#3.}$ (α.) Θεωρία (αναπαραγωγική ιδιότητα της Διωνυμικής κατανομής.

(β) Για $z=0$, είναι $X=Y=0$, δηλαδή δοθέντος ότι $X+Y=0$, η X είναι η σταθερά 0 (με πιθανότητα 1). Για $z\in\{0,1,\dots,n_1+n_2\}$ αλλά $z\neq 0$, η $X|X+Y=z$ έχει σύνολο τιμών $S=\{0,1,\dots,\min(z,n_1)\}$ και για $x\in S$, $f_{X|X+Y=z}(x|z)=\dfrac{f_{X,X+Y}(x,z)}{f_{X+Y}(z)}=$

$$=\frac{P(X=x,Y+X=z)}{P(X+Y=z)}=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(X+Y=z)}\underset{\text{ανεξ. } X,Y}{=}\frac{P(X=x)P(Y=z-x)}{P(X+Y=z)}=\frac{\binom{n_1}{x}p^x(1-p)^{n_1-x}\cdot\binom{n_2}{z-x}p^{z-x}(1-p)^{n_2-(z-x)}}{\binom{n_1+n_2}{z}p^z(1-p)^{n_1+n_2-z}}$$

$$=\frac{\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{z-x}}{\binom{n_1+n_2}{z}}.$$ Επομένως,

$X|X+Y=z\sim$ Υπεργεωμετρική με παραμέτρους n_1, n_2 (και z)

$\boxed{\#4.}$ Έχει λυθεί στην τάξη.

$\boxed{\#5.}$ (α) $E(X)=\int_1^\infty x\frac{1}{x^2}dx=\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\infty$. (β) Έστω ότι υπάρχει τέτοιο t_0. Τότε η ροπογεννήτρια $M(t)$ της τ.μ. X έχει παραγώγους κάθε τάξης, πεπερασμένες, σε περιοχή του 0. Άρα $E(X)=M'(0)<\infty$, άτοπο. Συγκεκριμένα, για $t<0$ έχουμε, $M(t)=\int_1^\infty e^{tx}\frac{1}{x^2}dx<\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=1$, δηλαδή η $M(t)$ είναι πεπερασμένη (και <1), ενώ για $t>0$ έχουμε, $M(t)=\int_1^\infty e^{tx}\frac{1}{x^2}dx=\infty$ επειδή $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{tx}}{x^2}=\infty$.