

#1. α. Διωνυμική,  $M(t) = (pe^t + q)^n$ ,  $q = 1 - p$ .

$$M'(t) = n(pe^t + q)^{n-1} \cdot pe^t, \quad M''(t) = n(n-1)p^2 e^{2t} (pe^t + q)^{n-2} + np(pe^t + q)^{n-1} e^t.$$

Επομένως,  $E(X) = M'(0) = n(p+q)^{n-1} \cdot p = np$ ,  $E(X^2) = M''(0) = n(n-1)p^2 + np$

και  $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p)$ .

$m(t) = \ln M(t) = n \ln(pe^t + q)$ ,  $m'(t) = n \frac{pe^t}{pe^t + q} = n \frac{p}{p+qe^{-t}}$ ,  $m''(t) = \frac{npqe^{-t}}{(p+qe^{-t})^2}$ .

Επομένως,  $E(X) = m'(0) = np$  και  $\text{Var}(X) = m''(0) = npq$ .

δ. Γάμμα,  $M(t) = \frac{\alpha^\beta}{(1-t\beta)^\beta}$ .

$$M'(t) = \frac{\alpha^\beta \beta}{(1-t\beta)^{\beta+1}}, \quad M''(t) = \frac{\alpha^\beta \beta(\beta+1)}{(1-t\beta)^{\beta+2}}.$$

Επομένως,  $E(X) = M'(0) = \alpha$ ,  $E(X^2) = M''(0) = \alpha(\alpha+1)$  και  $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha^2$ .

$m(t) = \ln M(t) = -\alpha \ln(1-t\beta)$ ,  $m'(t) = \frac{\alpha\beta}{1-t\beta}$ ,  $m''(t) = \frac{\alpha\beta^2}{(1-t\beta)^2}$ .

οπότε  $E(X) = m'(0) = \alpha$ ,  $\text{Var}(X) = m''(0) = \alpha\beta$ .

Όμοια για τις περιπτώσεις (β) και (γ).

#2. Έχει λυθεί στην τ.α.β.

#3. (α.) Θεωρία αναπαραγωγική ιδιότητα της Διωνυμικής κατανομής.

(β) Για  $z=0$ , είναι  $X=Y=0$ , δηλαδή δοθέντος ότι  $X+Y=0$ , η  $X$  είναι η σταθερά 0 (με πιθανότητα 1).

Για  $z \in \{0, 1, \dots, n_1+n_2\}$  αλλά  $z \neq 0$ , η  $X | X+Y=z$  έχει σύνολο

πληθών  $S = \{0, 1, \dots, \min(z, n_1)\}$  και για  $x \in S$ ,  $f_{X|X+Y=z}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, z-x)}{f_{X+Y}(z)} = \frac{f_X(x) f_Y(z-x)}{f_{X+Y}(z)}$ .

$$= \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P(X+Y=z)} = \frac{P(X=x) P(Y=z-x)}{P(X+Y=z)} = \frac{\binom{n_1}{x} p^x (1-p)^{n_1-x} \cdot \binom{n_2}{z-x} p^{z-x} (1-p)^{n_2-z+x}}{\binom{n_1+n_2}{z} p^z (1-p)^{n_1+n_2-z}}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{x} \binom{n_2}{z-x}}{\binom{n_1+n_2}{z}}.$$

Επομένως,  $X | X+Y=z \sim \text{Υπερχωμετρική με παραμέτρους } n_1, n_2 \text{ (και } z)$ .

#4. Έχει λυθεί στην τ.α.β.

#5. (α)  $E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$ . (β) Έστω ότι υπάρχει τέτοιο  $t_0$ . Τότε

η ροποχενήτρια  $M(t)$  της τ.μ.  $X$  έχει παραγωγούς κάθε τάξης, πεπερασμένες,

σε περιοχή του 0. Άρα  $E(X) = M'(0) < \infty$ , άτοπο. Συγκεκριμένα, για  $t < 0$

έχουμε,  $M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{x^2} dx < \int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$ , δηλαδή η  $M(t)$

είναι πεπερασμένη (και  $< 1$ ), ενώ για  $t > 0$  έχουμε,  $M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{x^2} dx = \infty$

επειδή  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{tx}}{x^2} = \infty$ .

#6. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα κατ' αρχάς για  $\sigma=1$ . Έχουμε τότε

$$M(t) = E(e^{tX}) = e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Επίσης, επειδή η (προσγεννη) τρία  $M(t)$  έχει πεπερασμένες σταθμικούς και οι τρεις

$$\text{σε + πεποχή του } 0, \text{ ισχύει } \exists M(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M^{(m)}(0) t^m}{m!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

οι συντελεστές (των) ιδίων δυνάμεων του  $t$  στα ανωτέρω (1) και (2) συμπίπτουν.

Επειδή το (1) έχει μόνον άρτιες δυνάμεις του  $t$ , προκύπτει ότι  $M^{(2k+1)}(0) = 0$  για  $k=0,1,2,\dots$  Συνεπώς,  $E(X^{2k+1}) = M^{(2k+1)}(0) = 0$ .

Από την άλλη πλευρά, για  $m=2k$ , εξισώνοντας τους συντελεστές του  $t^{2k}$  στα (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει } M^{(2k)}(0) = \frac{1}{2^k k!} \text{ ή } M^{(2k)}(0) = (2k)! \cdot \frac{1}{2^k k!} = (2k)! \cdot \frac{1}{2^k k!}.$$

Για αυθαίρετο  $\sigma$ , θέτουμε  $Y = \frac{X}{\sigma}$ . Μόλις  $Y \sim N(0,1)$ .

Επομένως από το μέρος που δαξαμε,  $E(Y^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$  και  $E(Y^{2k+1}) = 0$ .

Όμως,  $E(Y^m) = E\left[\left(\frac{X}{\sigma}\right)^m\right] = \frac{1}{\sigma^m} E(X^m)$  ή

$$E(X^m) = \sigma^m E(Y^m), \quad m=1,2,\dots$$

και αφού  $E(Y^m) = 0$  για  $m$  περιττό, έχουμε  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.

Επομένως,  $E(X^m) = \sigma^m E(Y^m)$  για  $m=1,2,\dots$  και  $E(X^m) = 0$  για  $m$  περιττό.