

#1. Δίνεται δείγμα $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ από ανεξάρτητες $X_i \sim N(\theta + i, 1)$, $i=1, \dots, n$. Θεωρούμε το (Π) $H_0: \theta = 0$ $H_1: \theta \neq 0$.

α. Ναδειχθεί ότι ο ΕΠΗ του θ είναι $\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{n+1}{2}$.

β. Να δειχθεί ότι ο ΕΛΠ έχει την μορφή $\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & |\hat{\theta}| > c \\ 0, & \leq c \end{cases}$.

γ. Να υπολογιστούν οι σταθερές c, γ ώστε ο ΕΛΠ να έχει μέγεθος α .

#2. Δίνεται δείγμα $\underline{X} = (X_1, X_2)$ από ανεξάρτητες $X_1 \sim \mathcal{E}(\theta)$ και $X_2 \sim \mathcal{E}(\theta/2)$. Θεωρούμε το (Π) $H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta \neq \theta_0$.

α. Να δειχθεί ότι ο ΕΠΗ του θ είναι $\hat{\theta} = \frac{1}{2}(X_1 + 2X_2)$.

β. Να κατασκευαστεί ο ΕΛΠ μεγέθους α .

#3. Δίνεται δείγμα $\underline{X} = (X_1, X_2)$ από ανεξάρτητες $X_1 \sim N(\theta, 1)$ και $X_2 \sim N(4\theta, 1)$. Θεωρούμε το (Π) $H_0: \theta = 0$ $H_1: \theta \neq 0$.

α. Να δειχθεί ότι ο ΕΛΠ είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης (σ.σ.) της $X_1 + 4X_2$.

β. Να κατασκευαστεί ο ΕΛΠ μεγέθους α .

#4. Δίνεται τυχούο δείγμα $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $f_1(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(x-1)}$, $x \geq 1$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Να κατασκευαστεί ο ΕΛΠ μεγέθους α για το (Π) $H_0: \theta = 1$ $H_1: \theta \neq 1$ (Υπόδ.: $X_i - 1 \sim \mathcal{E}(\theta)$)

#5. Δίνεται δείγμα $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ από ανεξάρτητες $X_1 \sim N(\theta, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\theta + 1, \sigma_2^2)$, $X_3 \sim N(\theta + 2, \sigma_3^2)$, όπου $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ είναι γνωστές σταθερές. Θεωρούμε το (Π) $H_0: \theta = 0$ $H_1: \theta \neq 0$.

α. Να δειχθεί ότι ο ΕΠΗ του θ είναι $\hat{\theta} = \left(\frac{X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2 - 1}{\sigma_2^2} + \frac{X_3 - 2}{\sigma_3^2} \right) / \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)$.

β. Να δειχθεί ότι ο ΕΛΠ είναι συνάρτηση της σ.σ. $X_1/\sigma_1^2 + (X_2 - 1)/\sigma_2^2 + (X_3 - 2)/\sigma_3^2$.

γ. Να κατασκευαστεί ο ΕΛΠ μεγέθους α .