Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙ

Συμβολισμοί: $U(\alpha,\beta)$, ομοιόμορφη κατανομή
$\mathcal{E}(\lambda)$, εκθετική κατανομή ($\lambda e^{-\lambda x}, x>0, \lambda>0$)
$G(\alpha,\beta)$, Γάμμα κατανομή ($\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x,\alpha,\beta>0$)
χ^2_r, χι-τετράγωνο κατανομή
$Beta(\alpha,\beta)$, Βήτα κατανομή
$N(\mu,\sigma^2)$, Κανονική κατανομή

#1. Αν $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, να δειχθεί ότι $1-e^{-\lambda X} \sim U(0,1)$.

#2. Αν $X \sim U(0,1)$, να δειχθεί ότι $-2\ln X \sim \chi^2_2$.

#3. Αν $X \sim Beta(\alpha,\beta)$, να δειχθεί ότι $1-X \sim Beta(\beta,\alpha)$.

#4. Αν η X έχει πυκνότητα $f_X(x) = nx^{n-1}/\theta^n$, $0<x<\theta$, $n>0$, να δειχθεί ότι η $Y = X/\theta$ έχει πυκνότητα $f_Y(y) = ny^{n-1}$, $0<y<1$.

#5. Μία γωνία X επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, δηλ. $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $Y = \varepsilon\varphi X$ έχει κατανομή Cauchy, με πυκνότητα $f_Y(y) = 1/[\pi(1+y^2)]$, $-\infty<y<\infty$.

#6. (Μετασχηματισμός Weibull σε εκθετική) Η τ.μ. X έχει κατανομή Weibull (με παραμέτρους α, λ) αν η πυκνότητα της είναι $f(x) = \lambda\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}$, $x>0, \alpha>0, \lambda>0$. Να δειχθεί ότι $Y = X^\alpha \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

#7. (Μετασχηματισμός της Pareto σε εκθετική) Η τ.μ. X έχει κατανομή Pareto (με παραμέτρους α,λ) αν η πυκνότητα της είναι $f(x) = \frac{\lambda\alpha^\lambda}{x^{\lambda+1}}$, $x>\alpha$, $\alpha,\lambda>0$. Να δειχθεί ότι $Y = \ln(X/\alpha) \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

#8. Αν $X \sim U(-\alpha,\alpha)$, $\alpha>0$, να δειχθεί ότι $|X| \sim U(0,\alpha)$.

#9. Αν $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, να βρεθεί η κατανομή της (δίτιμης) τ.μ. Y με τιμές -1 αν $X \geq EX$ και $+1$ αν $X < EX$.

#10. Αν $X \sim N(0,1)$, να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = |X|$

#11. Αν $X \sim N(0,1)$, να δειχθεί ότι $X^2 \sim \chi^2_1$.

#12. Αν $X \sim N(\mu,1)$, να δειχθεί ότι η τ.μ. $Y = X^2$ έχει πυκνότητα $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}(y+\mu^2)} \{e^{\mu\sqrt{y}} + e^{-\mu\sqrt{y}}\}$, $y>0$. (Η κατανομή της $Y = X^2$ αναφέρεται ως μη κεντρική χι-τετράγωνο με ένα βαθμό ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας μ^2, συμβολικά $\chi^2_1(\mu^2)$)

#13 (Μετασχηματισμός της Maxwell σε Γάμμα). Η ταχύτητα (πιο σωστά, το μέτρο της ταχύτητας) X σωματιδίου (μορίου) μάζας m είναι τ.μ. Maxwell με πυκνότητα $f_X(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x>0$. Να δειχθεί ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου $Y=\frac{1}{2}mX^2 \sim G(\frac{3}{2}, m)$.

#14 (Μετασχηματισμός διακειτής τ.μ.) Σε κάθε επανάληψη παιχνιδιού, παίκτης κερδίζει 20 € με πιθανότητα $\frac{1}{5}$ ή χάνει 5 € με πιθανότητα $\frac{4}{5}$. Έστω Y το "κέρδος" του (που μπορεί να είναι αρνητικό, δηλαδή ζημία) μετά από n ανεξάρτητες επαναλήψεις. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. Y.

#15. (Κατανομή Laplace ή διπλή εκθετική / Κατανομή της διαφοράς δύο ανεξαρτήτων και ισονόμων εκθετικών κατανομών). Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή κατανομή $\mathcal{E}(\lambda)$, να δειχθεί ότι η τ.μ. $V=X-Y$ έχει κατανομή Laplace με παράμετρο λ, δηλαδή πυκνότητα $f_V(v)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|v|}$, $-\infty<v<\infty$. Επί πλέον, να δειχθεί ότι οι τ.μ. $X+Y$ και $X-Y$ δεν είναι ανεξάρτητες.

#16. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κανονική κατανομή $N(0,1)$ να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των $X+Y$ και $X-Y$ και να εξετασθεί αν αυτές οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες. Επί πλέον, να δειχθεί ότι η τ.μ. X/Y έχει κατανομή Cauchy (με πυκνότητα $1/[\pi(1+y^2)]$, $-\infty<y<\infty$)

#17. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$, να δειχθεί ότι οι τ.μ. $U=X+Y$ και $V=X-Y$ έχουν πυκνότητες $f_U(u)=\begin{cases} u, & 0<u\le 1 \\ 2-u, & 1<u<2 \end{cases}$ και $f_V(v)=\begin{cases} 1+v, & -1<v\le 0 \\ 1-v, & 0<v<1 \end{cases}$. Επί πλέον να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $\frac{X}{Y}$ και να δειχθεί ότι $E(\frac{X}{Y})=\infty$.

#18. Αν οι τ.μ. X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα $f(x,y)=4xy$, $0<x<1$, $0<y<1$, να δειχθεί ότι η πυκνότητα της τ.μ. $V=XY$ είναι $f_V(v)=-4v\ln v$, $0<v<1$.

#19. (Μετασχηματισμός της κατανομής Rayleigh σε εκθετική) Η τ.μ. X έχει κατανομή Rayleigh με παράμετρο λ, αν η πυκνότητα της είναι $f(x)=2\lambda x e^{-\lambda x^2}$, $x>0$. Να δειχθεί ότι $Y=X^2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

#20. (Μετασχηματισμού κατανομή του $Y=F(X)$ για διακειτή τ.μ. X) (α). Έστω X τ.μ. Bernoulli με πιθανότητα $P(X=1)=p$, $0<p<1$, και συνάρτηση κατανομής $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y=F(X)$.
(β). Να γενικευθεί το ερώτημα (α), για αυθαίρετη διακειτή τ.μ. X.