Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙΙ (Λύσεις)

#3, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

α. $\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > 0.9 \\ 0, & X_1 \le 0.9 \end{cases}$. Το μέγεθος του $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_0}\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = P_{\theta=1/2}(X_1 > 0.9) =$

$= \int_{0.9}^{1} 2x\,dx = x^2\Big|_{0.9}^{1} = 0.19$. Η ισχύς του $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_1}\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = P_{\theta=1/3}(X_1 > 0.9) =$

$= \int_{0.9}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{0.9}^{1} = 1 - 0.9^3 = 1 - 0.729 = 0.271$.

β. Κατανομή (αντιστρέψιμου) μετασχηματισμού $Y = g(X_1)$ με $g(X_1) = -\ln X_1/\theta$:

$f_Y(y) = f_{X_1}(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$. Έχουμε, $y = -\ln x_1/\theta \Rightarrow x_1 = e^{-\theta y} = g^{-1}(y)$ και επομένως $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = e^{-\theta y}(-\theta)$. Αντικαθιστώντας,

$f_Y(y) = \frac{1}{\theta}(e^{-\theta y})^{\frac{1-\theta}{\theta}} \cdot |e^{-\theta y}(-\theta)| = e^{-y}$, $y > 0$ (επειδή $0 < X_1 < 1 \Rightarrow \ln X_1 < 0 \Rightarrow -\ln X_1 > 0 \underset{\theta>0}{\Rightarrow} -\ln X_1/\theta > 0 \Rightarrow Y > 0$). Επομένως, $-\ln X_1/\theta \sim \mathcal{E}(1) \equiv G(1,1)$

$\varphi_2(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \ln X_1 + \ln X_2 > c \\ 0, & \le \end{cases}$. Το μέγεθος του $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_0}\varphi_2(X) = P_{\theta=1/2}(\ln X_1 + \ln X_2 > c) = P_{\theta=1/2}\left(\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} < \frac{-c}{\theta}\right) = P_{\theta=1/2}\left(\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} < -2c\right)$. Η τ.μ. $\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} \equiv U$ είναι άθροισμα δύο ανεξαρτήτων και ισονόμων $\mathcal{E}(1)$, άρα ακολουθεί Γάμμα κατανομή, $G(\alpha=2, \beta=1)$, και η τ.μ. $2U \sim G(\alpha=2, \beta=2) \equiv \chi^2_4$.

Τελικά, το μέγεθος του $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι $P(2U < -4c) = P(\chi^2_4 < -4c) = F(-4c)$, όπου F η σ.κ. της χ^2_4. Θέλουμε λοιπόν ο φ_1 και ο φ_2 να έχουν το ίδιο μέγεθος, δηλαδή $F(-4c) = 0.19 \iff P(\chi^2_4 > -4c) = 0.81\ (= 1 - 0.19) \iff -4c = \chi^2_{4,0.81}$ (0.81-ποσοστιαίο σημείο της χ^2_4, που υπολογίζεται από πίνακες, δηλ. αριθμητικά και όχι αναλυτικά)

$\iff c = -\frac{1}{4}\chi^2_{4,0.81}$

γ. Διαπιστώνουμε ότι έχουμε ΜΕΟΚ και στη συνέχεια ΜΛΠ.

$f(\underset{\sim}{x};\theta) = f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\theta^2}(x_1x_2)^{\frac{1-\theta}{\theta}} = e^{-\ln\theta^2 + \frac{(1-\theta)}{\theta}\cdot(\ln x_1 + \ln x_2)}$, $\begin{matrix} 0 < x_1 < 1 \\ 0 < x_2 < 1 \end{matrix}$

άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta} - 1 \downarrow$ και $D(\underset{\sim}{X}) = \ln X_1 + \ln X_2$

(επιπλέον $S = \{(x_1,x_2) : f(\underset{\sim}{x};\theta) \ge 0\} = (0,1)\times(0,1)$, ανεξάρτητο του θ.)

Επειδή $c(\theta)\downarrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $-D(\underset{\sim}{X})$, άρα η μορφή του Ο.Ι.Ε. (επειδή $H_1 : \theta < 1/2$) είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & -D(\underset{\sim}{X}) < k \\ \gamma, & = k \\ 0, & > k \end{cases} \iff \varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & D(\underset{\sim}{X}) > -k \\ \gamma, & = -k \\ 0, & < -k \end{cases}$

$\iff \varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \ln X_1 + \ln X_2 > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases}$ με $c = -k$. Τώρα, ο $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι της μορφής $\varphi^*(\underset{\sim}{X})$ με $\gamma = 0$, άρα είναι Ο.Ι.Ε.

#7, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

Πρόκειται περί ΜΕΟΚ με $c(\theta) = -\theta$, $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Επειδή $c(\theta)\downarrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $T(\underset{\sim}{X}) = -D(\underset{\sim}{X})$ και επομένως η μορφή του Ο.Ι.Ε. είναι αυτή της εκφώνησης. Για $n=1$, παίρνοντας $\gamma = 0$, η σταθερά c ικανοποιεί τη σχέση $P_{\theta=1}(X_1^2 < c) = \delta$, οπότε $c = -\ln(1-\delta)$. Το μέγεθος είναι $E_{\theta=1/2}\varphi(\underset{\sim}{X}) = P_{\theta=1/2}(X_1^2 < c) = 1 - (1-\delta)^{1/2}$. | $(\iff P_{\theta=1}(X_1 < \sqrt{c}) = \delta)$

#1, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

(α) Θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία μέσω ΜΕΟΚ και ΜΛΠ.

$$f(\underline{x};\theta) = \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^n (x_i-1)} = e^{n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^n x_i + n\theta}$$

$S=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n: f(\underline{x};\theta)>0\} = (1,\infty)^n$, δεν εξαρτάται από το θ.

Άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta)=-\theta$, $D(\underline{X})=\sum_{i=1}^n X_i$ και επειδή $c(\theta)\downarrow$ ως προς θ έχουμε ΜΛΠ ως προς την $T(\underline{X}) = -D(\underline{X})$. Τώρα, επειδή η H_1 καθορίζει $\theta=2>1$, όπου $\theta=1$ είναι η τιμή του θ υπό την H_0, ο Ι.Ε έχει τη μορφή

$$\varphi_1(\underline{X}) = \begin{cases}1, & -D(\underline{X})>c_1\\ \gamma, & =c_1 \\ 0, & <c_1\end{cases} \iff \varphi_1(\underline{X}) = \begin{cases}1, & \sum X_i<c\\ \gamma, & =c\\ 0, & >c\end{cases}, \text{ όπου } c=-c_1$$

Για $\gamma=0$, προκύπτει ο Ι.Ε. $\varphi(\underline{X}) = \begin{cases}1, & \sum X_i<c\\ 0, & \geq c\end{cases}$.

(β) Για $n=1$, $\varphi(X_1) = \begin{cases}1, & X_1<c\\ 0, & \geq c\end{cases}$. Ζητάμε τη σταθερά c έτσι ώστε

$E_{\theta_0}\varphi_1(X_1)=\alpha \iff P_{\theta=1}(X_1<c)=\alpha \iff \int_1^c e^{-x+1}dx=\alpha \iff 1-e^{-c+1}=\alpha$

$\iff -c+1=\ln(1-\alpha) \iff c=1-\ln(1-\alpha)$. (Πρέπει $c>1$, που ισχύει)

Η ισχύς του $\varphi(X_1)$ είναι $E_\theta\varphi(X_1) = P_{\theta=2}(X_1<c) = \int_1^c 2e^{-2(x-1)}dx$
$= 1-e^{-2(c-1)} = 1-e^{+2\ln(1-\alpha)} = 1-(1-\alpha)^2$.

γ. Και για τα τρία προβλήματα, το μέγεθος του $\varphi(X_1)$ είναι α: Τα (Π1) και (Π2) έχουν την ίδια μηδενική υπόθεση H_0, όπως στο ερώτημα (α), άρα και το ίδιο μέγεθος. Για το (Π3) το μέγεθος του $\varphi(X_1)$ είναι $\sup_{\theta\le 1} E_\theta\varphi(X_1)$. Όμως, από τη σχετική θεωρία γνωρίζουμε ότι λόγω ΜΛΠ το sup επιτυγχάνεται για $\theta=1$, δηλ. $\sup_{\theta\le 1}E_\theta\varphi(X_1) = E_{\theta=1}\varphi(X_1)=\alpha$ εξ υποθέσεως. Επιπλέον ο $\varphi(X_1)$ έχει μέγιστη ισχύ για το (Π1), από τη σχετική θεωρία λόγω ΜΛΠ, και για τα (Π2) και (Π3) επειδή η εναλλακτική υπόθεση σε αυτά είναι $\theta\in(4,\infty)$ που είναι υποσύνολο του $\theta\in(1,\infty)$. $((4,\infty)\subset(1,\infty))$

#6, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

(α) Θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία μέσω ΜΕΟΚ και ΜΛΠ.

$$f(\underline{x};\theta) = \frac{1}{2^n\theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum(x_i-1)} = e^{-\ln(2^n\theta^n) - \frac{1}{2\theta}\sum x_i + \frac{n}{2\theta}}$$

$S=(1,\infty)^n$, δεν εξαρτάται από το θ, άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta)=-\frac{1}{2\theta}$ και $D(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$. Επειδή $c(\theta)\uparrow$ ως προς θ, έχουμε ΜΛΠ ως προς την $D(\underline{X})$. Τέλος επειδή η τιμή του θ στην H_1 είναι μεγαλύ-

Έτσι από την τιμή του θ στην H_0, από τη σχετική θεωρία, προκύπτει ότι ο Ι.Ε. έχει τη μορφή

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & D(\underset{\sim}{X}) > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases} \Longleftrightarrow \varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} X_i > c \\ \gamma & = c \\ 0 & < c \end{cases}$$

(β) $\gamma = 0$ λόγω συνεχούς κατανομής, ενώ για τον υπολογισμό του c θέτουμε $E_{\theta=1}\varphi(X_1) = \delta \Longleftrightarrow P_{\theta=1}(X_1 > c) = \delta \Longleftrightarrow \int_c^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(x-1)} dx = \delta \Longleftrightarrow$
$e^{-\frac{1}{2}(c-1)} = \delta \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}(c-1) = \ln\delta \Longleftrightarrow c = 1 - 2\ln\delta$.

(γ) Ο $\varphi(\underset{\sim}{X})$ είναι Ο.Ι.Ε. για τα (Π2) και (Π3): Η μηδενική υπόθεση είναι η ίδια όπως στο ερώτημα (α), άρα και το μέγεθος του $\varphi(\underset{\sim}{X})$ διατηρείται, ενώ έχει και μέγιστη ισχύ για μεν το (Π2) από τη σχετική θεωρία, λόγω ΜΛΠ, για δε το (Π3) επειδή η εναλλακτική υπόθεση του είναι "υποσύνολο" της εναλλακτικής υπόθεσης του (Π2) $\left((1,\infty) \subset (1/2, \infty) \right)$

Για το (Π1), ο $\varphi(\underset{\sim}{X})$ δεν είναι Ο.Ι.Ε.: Λόγω ΜΕΟΚ και ΜΛΠ, η μορφή του Ο.Ι.Ε. για το (Π1) είναι

$$\varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum X_i < c \\ \gamma, & = c \\ 0, & > c \end{cases}$$

#2, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i-\theta)^2} = \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta)^2}{\sigma_i^2}}, \ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - 2\theta \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}$. Επομένως, το $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ ανήκει σε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = \theta$, $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sigma_i^2}$. Επειδή $c(\theta)\uparrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $T(\underset{\sim}{X}) = D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sigma_i^2}$ και συνεπώς ο Ο.Ι.Ε. έχει τη μορφή

$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & T(\underset{\sim}{X}) < c \\ \gamma, & = c \\ 0, & > c \end{cases}$. Λόγω συνεχούς κατανομής, $\gamma = 0$, και η σταθερά c ικανοποιεί τη σχέση $P_{\theta_0}(T(\underset{\sim}{X}) < c) = \alpha$. Η κατανομή της $T(\underset{\sim}{X})$ είναι $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}$. Τυποποιώντας, έχουμε $\frac{T(\underset{\sim}{X}) - \theta\sigma^2}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, οπότε προκύπτει $P\left(Z < \frac{c - \theta_0\sigma^2}{\sigma}\right) = \alpha$, δηλαδή $\frac{c - \theta_0\sigma^2}{\sigma} = -z_\alpha \Longleftrightarrow c = \theta_0\sigma^2 - \sigma z_\alpha$. Τελικά ο Ο.Ι.Ε. μεγέθους α είναι

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sigma_i^2} < \theta_0\sigma^2 - \sigma z_\alpha \\ 0, & \geq \end{cases}$$

#4, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

Το $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ ανήκει σε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = \theta$, $D(\underset{\sim}{X}) = X_1 + 2X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, με $\mu = 5\theta$ και $\sigma^2 = 5$, οπότε $Z = \frac{D(\underset{\sim}{X}) - 5\theta}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$. Επειδή $c(\theta)\uparrow$ έχουμε ΜΛΠ ως προς $T(\underset{\sim}{X}) = D(\underset{\sim}{X})$.

Άρα, ο Ο.Ι.Ε. έχει τη μορφή $\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & D(\underline{X}) > c \\ \gamma, & = \\ 0, & < \end{cases}$. Λόγω συνεχούς κατανομής, $\gamma = 0$ και η σταθερά c ικανοποιεί τη σχέση $P_{\theta_0}(D(\underline{X}) > c) = \alpha$, οπότε με τυποποίηση της $D(\underline{X})$ προκύπτει ότι $c = 5\theta_0 + \sqrt{5}\, z_\alpha$. Η ισχύς είναι $\pi(\theta) = E_\theta \varphi(\underline{X})$ $= P_\theta(D(\underline{X}) > c) = P\left(Z > \frac{c - 5\theta}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-5\theta}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \sqrt{5}(\theta - \theta_0)\right)$, για $\theta > \theta_0$. Ο έλεγχος $\varphi(\underline{X})$ είναι Ο.Ι.Ε. μεγέθους α και για το $H_0: \theta \le \theta_0$ κατά $H_1: \theta > \theta_0$, επειδή έχει την ίδια εναλλακτική, όπως το αρχικό πρόβλημα, και μέγεθος ίσο προς $\sup_{\theta \le \theta_0} E_\theta \varphi(\underline{X}) = E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$ (Η πρώτη ισότητα ισχύει επειδή, λόγω ΜΛΠ, $E_\theta \varphi(\underline{X})$ είναι αύξουσα ως προς θ, ενώ η δεύτερη εκ κατασκευής του $\varphi(\underline{X})$).

#5, Φυλλάδιο Ασκήσεις III. Έχει λυθεί στην τάξη

#8, Φυλλάδιο Ασκήσεις III

α. $X_1 \sim N(1, \theta^2)$, $X_2 \sim N(2, 4\theta^2)$, $X_3 \sim N(3, 9\theta^2)$

$$f(\underline{x};\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1-1)^2} \cdot \frac{1}{2\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8\theta^2}(x_2-2)^2} \cdot \frac{1}{3\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{18\theta^2}(x_3-3)^2}$$

$$= \frac{1}{6\theta^3(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\left[(x_1-1)^2 + \frac{(x_2-2)^2}{4} + \frac{(x_3-3)^2}{9}\right]}, \quad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Επομένως το $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ανήκει σε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ και $D(\underline{X}) = (X_1 - 1)^2 + \frac{1}{4}(X_2-2)^2 + \frac{1}{9}(X_3-3)^2$. Επειδή $c(\theta) \uparrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς την $T(\underline{X}) = D(\underline{X})$.

β. Η μορφή των Ι.Ε. είναι $\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{X}) > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases}$. Λόγω συνεχούς κατανομής, $\gamma = 0$, ενώ η σταθερά c ικανοποιεί τη σχέση $P_{\theta=1}(T(\underline{X}) > c) = \alpha$. Για κάθε $\theta > 0$, ισχύει $T(\underline{X})/\theta^2 \sim \chi^2_3$ και επομένως (για $\theta = 1$) η παραπάνω σχέση δίνει $c = \chi^2_{3,\alpha}$.

γ. Το πρόβλημα έχει την ίδια H_0, όπως το αρχικό, άρα και το ίδιο μέγεθος. Επιπλέον, λόγω ΜΛΠ, ο $\varphi(\underline{X})$ είναι Ο.Ι.Ε. όταν η εναλλακτική είναι $H_1: \theta > 1$. Συνεπώς, ο $\varphi(\underline{X})$ είναι Ο.Ι.Ε. μεγέθους α και για το $H_0: \theta = 1$ κατά $H_1: \theta > 1$.