# Ασκήσεις IV - Στατιστική Συμπερασματολογία II

#1. Δίνεται μια παρατήρηση $X$ με πυκνότητα
$f(x;\theta) = 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)$, $0<x<1$, $\theta \in [0,1]$

α. Να δειχθεί ότι η οικογένεια $\{f(x;\theta) : \theta\in[0,1]\}$ έχει την ιδιότητα ΜΛΠ

β. Να κατασκευαστεί Ι.Ε. μεγέθους α για το (Π)
$H_0: \theta = 1/2 \quad H_1: \theta = 1/3$
και να υπολογιστεί η ισχύς του

---

#2. Δίνεται τ.δ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $f_1(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$, $\theta>0$

α. Να δειχθεί ότι το $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην ΜΕΟΚ

β. Να κατασκευαστεί Ο.Ι.Ε. μεγέθους α για το (Π) $H_0: \theta \geq 1 \quad H_1: \theta < 1$

γ. Να βρεθεί η τιμή p (p-value) μέσω της συνάρτησης κατανομής κατάλληλης χι-τετράγωνο τ.μ.

---

#3. Δίνεται τ.δ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $f_1(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}$, $0<x<\theta$, $\theta\in\Theta=(0,\infty)$.
Θεωρούμε το πρόβλημα $H_0: \theta=1 \quad H_1: \theta=2$

(α) Να βρεθεί η p-value του ελέγχου $\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)}>c \\ 0, & \leq c \end{cases}$
ως συνάρτηση του $X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$

(β.) Για $n=3$ και $x_1 = 0.28$, $x_2 = 0.97$, $x_3 = 0.56$, να βρεθούν όλα τα επίπεδα σημαντικότητας για τα οποία απορρίπτεται η $H_0$ χρησιμοποιώντας τον $\varphi$.

(γ.) Με τα δεδομένα του (β), τι απόφαση λαμβάνεται για $\alpha=5\%$ ή $\alpha=10\%$;

---

#4. Χρησιμοποιώντας το δείγμα και την κατανομή της Άσκησης #3, να βρεθεί η p-value του ελέγχου
$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)}<c \\ 0, & \geq c \end{cases}$ για το $H_0: \theta=2 \quad H_1: \theta=1$.