

Θεωρία Πιθανοτήτων II, Λύσεις των Ασκήσεων 4

Οι #4, #5, #6, #8 έχουν λυθεί στην τσάφη.

#1. (α) Το εύρος τιμών της X είναι $S_X = (0, \infty)$ και για $x \in S_X$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^{\infty} x e^{-xy} dy = e^{-x}$ (δηλαδή $X \sim \mathcal{E}(1)$).
 Το εύρος τιμών της Y είναι $S_Y = [1, \infty)$ και για $y \in S_Y$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{\infty} x e^{-xy} dx = \Gamma(2) \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2}$ (ή με παραγοντική ολοκλήρωση ή χρησι-
 μοποιώντας (το γεγονός) ότι η μέση τιμή της $\mathcal{E}(\lambda)$ είναι $\frac{1}{\lambda}$ με $\lambda=y$).

Δεν είναι ανεξάρτητες γιατί $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.
 (β) $f_{X|Y=2}(x|2) = \frac{f(x,2)}{f_Y(2)} = 4x e^{-2x}$, $x > 0$, δηλαδή $X|Y=2 \sim \mathcal{G}(\alpha=2, \beta=\frac{1}{2})$.
 Επομένως $E(X|Y=2) = \alpha \cdot \beta = 1$. (Επειδή $f(x|2) \neq f_X(x)$, προκύπτει, επίσης, ότι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.)

$$P(X > 1 \text{ ή } Y > 2) = P(X > 1) + P(Y > 2) - P(X > 1, Y > 2) = \int_1^{\infty} e^{-x} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = e^{-1} + \frac{1}{2} - \int_1^{\infty} \int_2^{\infty} x e^{-xy} dy dx = e^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2}.$$

#2. (α) Ναι, επειδή $f(x,y) = g(x)h(y)$, $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, $g(x) = 6x^2$, $h(y) = y$.
 (β) Όχι, επειδή $x \cdot f(x,y)$ δεν είναι γινόμενο $g(x)h(y)$.
 (γ) Όχι, επειδή $S_{X,Y} = \{(x,y) : f(x,y) > 0\}$ δεν είναι καρτέσιανό γινόμενο.
 (δ) Ναι, επειδή $f(x,y) = g(x)h(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x) = \frac{1}{4\pi} e^{-x^2/2}$, $h(y) = e^{-y^2/8}$.

#7. (γενική περίπτωση $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$) Το εύρος τιμών της X είναι $S_X = (0, \infty)$. Για $x \in S_X$, $F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \dots P(X_n > x) = 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \dots e^{-\lambda_n x} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}$.
 Επομένως, $f_X(x) = F'_X(x) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}$, $x > 0$, δηλαδή $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ με $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
 Στην ειδική περίπτωση $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$, έχουμε $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n\lambda$, δηλαδή $X \sim \mathcal{E}(n\lambda)$.

#9. Λόγω ισονομίας οι $\frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n}, \frac{X_2}{X_1 + \dots + X_n}, \dots, \frac{X_n}{X_1 + \dots + X_n}$ έχουν κοινή κατανομή, άρα και κοινή μέση τιμή. Συνεπώς,
 $E \frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n} = E \frac{X_2}{X_1 + \dots + X_n} = \dots = E \frac{X_n}{X_1 + \dots + X_n}$. Επειδή (προσanis)
 $\frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n} + \frac{X_2}{X_1 + \dots + X_n} + \dots + \frac{X_n}{X_1 + \dots + X_n} = 1$, προκύπτει $E \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_n} = \frac{1}{n} \forall i$ και

$$\text{επομένως } E \frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n} = E \frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n} = E \frac{X_2}{X_1 + \dots + X_n} = \dots = E \frac{X_k}{X_1 + \dots + X_n} = \frac{k}{n}$$

#10. Τα δύνοχαοπιτών των X και Y είναι $S = (-1, 1)$ και $S = (-1, 1)$ αντίστοιχα. Επίσης, επειδή από κοινού πυκνότητα $f(x, y)$ είναι δύνοχαοπιτών ως προς x, y , οι X και Y έχουν την ίδια κατανομή. Για $x \in S$, $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2}$, και επομένως $f(y) = \frac{1}{2}$, με $S_y = S$. Το δύνοχαοπιτών των X^2 και Y^2 είναι $[0, 1]$ και λόγω δύνοχαοπιτών μπορεί να ληφθεί το $(0, 1)$. Θα αποδείξουμε ανεξάρτησία των X^2, Y^2 με βάση

(Για $s = 0 < u < 1$, $0 < v < 1$, έχουμε $0 < x < \sqrt{u}$, $0 < y < \sqrt{v}$ (δυνατότητων κατανομής g)

$$P(X^2 \leq u, Y^2 \leq v) = P(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}, -\sqrt{v} \leq Y \leq \sqrt{v}) = \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(x, y) dy dx = \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{1}{2} \sqrt{v} dx = \sqrt{u} \sqrt{v} = P(X^2 \leq u) P(Y^2 \leq v)$$

$$\text{Επίσης, } F_{X^2}(u) = P(X^2 \leq u) = P(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) = \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{u} \text{ και } F_{Y^2}(v) = P(Y^2 \leq v) = \sqrt{v}$$

Επομένως $F_{X^2, Y^2}(u, v) = F_{X^2}(u) F_{Y^2}(v)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 1$. Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι ισχύει η τελευταία ιδιότητα για τα υπόλοιπα χωρία του $\mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ δηλαδή X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

#3: $X \sim \text{Exp}(1)$, $Y \sim \text{Exp}(1)$

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0.10	0.06	0.04	0.20
1	0.35	0.21	0.14	0.70
2	0.05	0.03	0.10	
$f_Y(y)$	0.50	0.30	0.20	

(ii) $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ $\forall x, y$, άρα οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

#P: $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq t) = \int_0^t \int_0^{t-x_1} \dots \int_0^{t-x_1-\dots-x_{n-1}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \dots \lambda_n e^{-\lambda_n x_n} dx_n \dots dx_1$$

$$= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \left(\int_0^{t-x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \dots \lambda_n e^{-\lambda_n x_n} dx_n \dots dx_2 \right) dx_1$$

$$= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2(t-x_1)}}{\lambda_2} \right) dx_1 = \dots = \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}$$