Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ, Λύσεις των Ασκήσεων 3

Οι #1, #2, #3, #4, #6 έχουν λυθεί στην τάξη.

$\boxed{\#5.}$ (α) $f_{Y|X=x}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{f_Y(y)\, f_{X|Y=y}(x|y)}{f_X(x)}$, για $y>0$ και $x>0$.

Αντικαθιστώντας, $f_Y(y) = e^{-y}$ και $f_{X|Y=y}(x|y) = \dfrac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-yx}$, έχουμε $f_{Y|X=x}(y|x) = C(x)\, y^\alpha e^{-(x+1)y}$, όπου $C(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\cdot f_X(x)}$. Για την εύρεση του $C(x)$, δεν χρειάζεται να υπολογιστεί η $f_X(x)$, αρκεί να χρησιμοποιηθεί η συνθήκη κανονικοποίησης για την $f_{Y|X=x}(y|x)$, δηλαδή $\int_0^\infty f_{Y|X=x}(y|x)\,dy = 1$. Επομένως, $\int_0^\infty C(x)\, y^\alpha e^{-(x+1)y}\,dy = 1 \Rightarrow$

$C(x)\int_0^\infty y^\alpha e^{-(x+1)y}\,dy = 1 \Rightarrow C(x)\cdot\Gamma(\alpha+1)(1+x)^{-(\alpha+1)} = 1 \Rightarrow C(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot(1+x)^{\alpha+1}$.

Τελικά, $f_{Y|X=x}(y|x) = \dfrac{(1+x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} y^\alpha e^{-(1+x)y}$, $y>0$, που είναι η πυκνότητα της κατανομής Γάμμα $G(\alpha+1, \frac{1}{1+x})$. (Ούτε το $C(x)$ χρειάζεται να υπολογιστεί, προκύπτει αμέσως από τη μορφή (ως προς y) που έχει η $f_{Y|X=x}(y|x)$. Ούτως, η μορφή της $f_{Y|X=x}(y|x)$ παραπέμπει κατευθείαν σε κατανομή $G(\alpha+1, \frac{1}{1+x})$)

(β) Αν $Z \sim G(\alpha,\beta)$, τότε $E(Z) = \alpha\beta$, $E(Z^2) = \alpha(\alpha+1)\beta^2$, $E(Z^4) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\beta^4$ (από ΘΠΙ ή μέσω της ροπογεννήτριας)

Επειδή $Y|X=x \sim G(\alpha+1, \frac{1}{1+x})$, έχουμε $E(Y|X=x) = \dfrac{(\alpha+1)}{1+x}$ και

$Var(Y^2|X=x) = E(Y^4|X=x) - [E(Y^2|X=x)]^2 = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{(1+x)^4} - \dfrac{(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2}{(1+x)^4}$.

$\boxed{\#7.}$ Οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής είναι, αντίστοιχα, $\lim_{y\to\infty} H_\alpha(x,y)$ και $\lim_{x\to\infty} H_\alpha(x,y)$. Είναι $\lim_{y\to\infty} H_\alpha(x,y) = \lim_{y\to\infty}\{F(x)G(y)[1+\alpha(1-F(x))(1-G(y))]\}$

$= F(x)\lim_{y\to\infty} G(y)\,[1+\alpha(1-F(x))\cdot(1-\lim_{y\to\infty} G(y))] = F(x)$, γιατί $\lim_{y\to\infty} G(y) = 1$.

Ανάλογα, για την άλλη περιθώρια συνάρτηση κατανομής.

Για $F(x) = G(y) = 1$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ (δηλαδή οι περιθώριες είναι ομοιόμορφες στο $U(0,1)$, $U(0,1)$, έχουμε:

$H_0(x,y) = xy$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

$H_1(x,y) = xy[1+(1-x)(1-y)] = 2xy - x^2y - xy^2 + x^2y^2$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

$H_{-1}(x,y) = xy[1-(1-x)(1-y)] = x^2y + xy^2 - x^2y^2$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

(Να βρεθούν οι H_0, H_1, H_{-1} και στα υπόλοιπα χωρία του R^2 !!!)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τρεις διαφορετικές δισδιάστατες κατανομές έχουν τις ίδιες (ομοιόμορφες) περιθώριες κατανομές. Μάλιστα, η H_0 αντιστοιχεί σε ανεξάρτητες περιθώριες κατανομές, ενώ οι H_1 και H_{-1} σε εξαρτημένες. Η άσκηση $\boxed{\text{είναι}}$ ένα (ιστορικό) παράδειγμα ότι οι περιθώριες κατανομές δεν καθορίζουν την από κοινού κατανομή.

$\boxed{\#8.}$ $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(y) f_{X|Y=y}(x|y)\,dy\,dx \underset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(y) f_{X|Y=y}(x|y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y)\,dx\right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, E(X|Y=y)\,dy.$$

((*): υπό τον όρο ότι είναι επιτρεπτή η εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης).

Στην περίπτωση διακριτής από κοινού κατανομής, έχουμε $E(X) = \sum_y E(X|Y=y) f_Y(y)$.

Παρόμοια, $Eg(X) = \int^{+\infty} E(g(X)|Y=y) f_Y(y)\,dy$ ή

$Eg(X) = \sum_y E(g(X)|Y=y) f_Y(y)$. (Η παραπάνω σχέση εκφράζει ότι η μέση τιμή της X είναι η μέση τιμή (ως προς Y) της δεσμευμένης μέσης τιμής της X)

$\boxed{\#9.}$ Χρησιμοποιώντας την #8,

$$E(Y) = \int^{+\infty} E(Y|X=x) f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\cdot 1\,dx = \frac{1}{4}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y^2|X=x) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left\{Var(Y|X=x) + \left[E(Y|X=x)\right]^2\right\} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{1}{9}$$

(χωρίς να χρειαστεί να βρεθεί η περιθώρια κατανομή της Y ή η από κοινού των X, Y. Να βρεθεί η από κοινού κατανομή των X, Y και να γίνουν οι υπολογισμοί $E(Y)$, $Var(Y)$ χρησιμοποιώντας την από κοινού πυκνότητα)