Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ – Ασκήσεις ΙΙ – Λύσεις

#1. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$

$H_0:\ \theta=\theta_0=1/2$ κατά $H_1:\ \theta=\theta_1=2/3$ $(\theta_1>\theta_0)$

Η μορφή των Ι.Ε. είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underset{\sim}{x})>k\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =k\\ 0, & <k\end{cases}$, $\lambda(\underset{\sim}{x})=\dfrac{f(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{f(\underset{\sim}{x};\theta_0)}$

$\lambda(\underset{\sim}{x})=\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\sum x_i}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-\sum x_i}$. Έχουμε, $\lambda(\underset{\sim}{x})>k \iff \ln\lambda(\underset{\sim}{x})>\ln k \iff$
$\sum x_i\left(\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)+\left(n-\sum x_i\right)\left(\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)>\ln k \iff$

$\sum x_i\Big(\underbrace{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}-\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}_{>0,\ \text{επειδή } \theta_1>\theta_0}\Big)>\ln k-n\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} \iff \sum x_i>c_1,\quad c_1=\dfrac{\ln k-n\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}-\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}$.

Επομένως, $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \sum x_i>c_1\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =c_1\\ 0, & <c_1\end{cases}$. Ο δοθείς έλεγχος $\varphi(\underset{\sim}{x})$ έχει την μορφή $\varphi^*(\underset{\sim}{x})$ με $c_1=c$, $\gamma(\underset{\sim}{x})=\gamma$ (σταθερά) άρα είναι Ι.Ε. Στις περιπτώσεις α) $H_1:\ \theta=4/5$ και γ) $H_1:\ \theta=5/8$ δεν θα αλλάξει γιατί $\theta_1=4/5>\theta_0=1/2$ και $\theta_1=5/8>\theta_0=1/2$. Θα αλλάξει όμως στην περίπτωση β) $H_1:\ \theta=1/3$ επειδή $\theta_1=1/3<\theta_0=1/2$.

Η ισχύς του $\varphi(\underset{\sim}{X})$ στο $\theta=2/3$, επειδή $\sum X_i\sim B(n,2/3)$, είναι $\pi(2/3)=E_{\theta=2/3}\varphi(\underset{\sim}{X})=1\cdot P_{\theta=2/3}\left(\sum X_i>c\right)+\gamma\, P_{\theta=2/3}\left(\sum X_i=c\right)$, και οι δύο τελευταίες πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν από τις διωνυμικές πιθανότητες $\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

#2. Έχει λυθεί στην τάξη. [Σχόλιο για την #1: Μπορεί επίσης να λυθεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ είναι ΜΕΟΚ με $c(\theta)\uparrow$]

#3. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{3} f_i(x_i;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}\cdot e^{-2\theta}\frac{(2\theta)^{x_2}}{x_2!}\cdot e^{-3\theta}\frac{(3\theta)^{x_3}}{x_3!}=\frac{2^{x_2}\cdot 3^{x_3}}{x_1!\,x_2!\,x_3!}e^{-6\theta}\theta^{x_1+x_2+x_3}$

Η μορφή των Ι.Ε. ελέγχων για το πρόβλημα $H_0:\ \theta=\theta_0=1$ κατά $H_1:\ \theta=\theta_1=2$ $(\theta_1>\theta_0)$ είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underset{\sim}{x})>k\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =k\\ 0, & <k\end{cases}$, $\lambda(\underset{\sim}{x})=\dfrac{f(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{f(\underset{\sim}{x};\theta_0)}=e^{6(\theta_0-\theta_1)}\cdot\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

Έχουμε $\lambda(\underset{\sim}{x})>k \iff \ln\lambda(\underset{\sim}{x})>\ln k \iff 6(\theta_0-\theta_1)+(x_1+x_2+x_3)\underbrace{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}}_{>0}>\ln k \iff$
$x_1+x_2+x_3>\dfrac{\ln k-6(\theta_0-\theta_1)}{\ln\theta_1-\ln\theta_0}=c_1$. Επομένως, $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & x_1+x_2+x_3>c_1\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =c_1\\ 0, & <c_1\end{cases}$

Ο δοθείς έλεγχος $\varphi(\underset{\sim}{x})$ είναι της μορφής $\varphi^*(\underset{\sim}{x})$ με $c_1=c$ και $\gamma(\underset{\sim}{x})=\gamma$.

#4. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum(x_i-1)}=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum x_i+\frac{n}{2\theta}}$, που είναι ΜΕΟΚ με $c(\theta)=-\frac{1}{2\theta}\uparrow$, $D(\underset{\sim}{x})=\sum x_i$, $S=(1,\infty)^n$ ανεξάρτητο του θ. Επομένως, επειδή $\theta_1=1>1/2=\theta_0$, ο έλεγχος $\varphi(\underset{\sim}{X})$ είναι Ι.Ε.

β) Για $n=1$, $\gamma=0$ (λόγω συνεχούς κατανομής), οπότε η ισχύς του $\varphi(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta=1}\varphi(\underset{\sim}{X})=P_{\theta=1}(X_1>c)$. Συνεπώς, $P_{\theta=1}(X_1>c)=\delta \underset{c>1}{\iff} \int_c^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\delta$
$\iff e^{-\frac{1}{2}(c-1)}=\delta \iff c=1-2\ln\delta$ (>1, επειδή $0<\delta<1$)