

Στατιστική Συμπερασματολογία II - ΑΣΚΗΣΕΙΣ III +

#1. Δίνεται μια παρατήρηση X με πυκνότητα $f_0(x) = \frac{1}{2}$, $-1 < x < 1$ ή $f_1(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{αν } -1 < x < 0 \\ 1-x, & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$ (δηλαδή $f_1(x) = 1-|x|$, $-1 < x < 1$). Να κατασκευαστεί Ι. Ε. μεγέθους α για το πρόβλημα $H_0: X \sim f_0$ κατά $H_1: X \sim f_1$.

#2. Έστω X μια παρατήρηση από την (λογιστική) κατανομή με πυκνότητα $f(x; \theta) = \frac{e^{-x+\theta}}{(1+e^{-x+\theta})^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείχθει ότι η οικογένεια $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta = \mathbb{R}\}$ έχει την ιδιότητα ΜΛΠ.

#3. Δίνεται μια παρατήρηση X από την κατανομή με πυκνότητα $f(x; \theta) = 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)$, $0 < x < 1$, $\theta \in [0, 1]$. Να κατασκευαστεί Ι. Ε. μεγέθους α για το πρόβλημα $H_0: \theta = \theta_0$ κατά $H_1: \theta = \theta_1$, με $\theta_1 > \theta_0$.

#4. Ένας έλεγχος για το πρόβλημα $H_0: \theta \in \Theta_0$ κατά $H_1: \theta \in \Theta_1$ ονομάζεται αμερόληπτος αν η ισχύς του είναι, για κάθε $\theta \in \Theta_1$, μεγαλύτερη ή ίση του μεγέθους του. Να δείχθει ότι ένας Ο.Ι.Ε. έλεγχος είναι αμερόληπτος.

#5. Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underline{X} = (X_1, X_2)$ από την κατανομή Poisson, $P(\lambda)$.

α. Να βρεθεί η μορφή του Ι.Ε. για το (Π) $H_0: \lambda = 1$ $H_1: \lambda = 2$.

β. Να κατασκευαστεί Ι.Ε. μεγέθους $1 - e^{-2} \cdot \frac{19}{3} \approx 0.15$

γ. Να κατασκευαστεί Ι.Ε. μεγέθους 10%.