Εξέταση στη Μαθηματική Λογική

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

30 Ιανουαρίου 2015

Θέμα 1: α) Εξετάστε αν είναι ταυτολογία η πρόταση:

$$((\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \varphi_4) \rightarrow \varphi_5) \;\rightarrow\; \varphi_5$$

β) Εξετάστε αν τα παρακάτω ζεύγη είναι λογικά ισοδύναμες προτάσεις μεταξύ τους:

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) \quad \text{και} \quad (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)$$

$$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)) \rightarrow \varphi_1 \quad \text{και} \quad \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$$

γ) Γράψτε μια πρόταση που να περιέχει τρεις προτασιακές μεταβλητές και να είναι ψευδής ακριβώς στις περιπτώσεις που και οι τρεις αυτές μεταβλητές είναι αληθείς ή και οι τρεις είναι ψευδείς.

Λύση: α) Μια αποτίμηση που δίνει στις φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 αληθοτιμή 0 κάνει ψευδή τη δοθείσα πρόταση, επομένως δεν είναι ταυτολογία.

β) Χρησιμοποιώντας γνωστές λογικές ισοδυναμίες είναι

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) &\equiv (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \wedge (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \\
&\equiv (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \wedge \mathsf{T} \\
&\equiv \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) \\
&\equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)
\end{aligned}$$

ενώ για το άλλο ζεύγος έχουμε ότι μια αποτίμηση με $v(\varphi_1) = 0$, $v(\varphi_2) = 0$, $v(\varphi_3) = 1$ δίνει αληθοτιμή 0 στην πρώτη πρόταση του ζευγαριού και 1 στη δεύτερη, άρα δεν είναι λογικά ισοδύναμες.

γ) Αφού η ζητούμενη πρόταση γίνεται ψευδής ακριβώς στις περιπτώσεις που και οι τρεις αυτές μεταβλητές είναι αληθείς ή και οι τρεις είναι ψευδείς, σημαίνει ότι γίνεται αληθής από τις υπόλοιπες έξι απονομές αληθοτιμών. Επομένως μια πρόταση λογικά ισοδύναμη με τη ζητούμενη είναι η

$(A \wedge B \wedge \neg\Gamma) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg\Gamma) \vee (A \wedge \neg B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg\Gamma)$

Θέμα 2: Αποδείξτε ότι οι παρακάτω δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:

α) Το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ δεν είναι αντιφατικό (είναι επαληθεύσιμο).

β) Η πρόταση $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1}) \rightarrow \neg\varphi_n$ δεν είναι ταυτολογία.

Λύση: Δεχόμενοι την πρώτη συνθήκη, ξέρουμε ότι η αποτίμηση που κάνει όλες τις προτάσεις του συνόλου $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ αληθείς δίνει αληθοτιμή 1 στη σύζευξη $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1})$ και αληθοτιμή 0 στην $\neg\varphi_n$, άρα δίνει αληθοτιμή 0 στη $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1}) \rightarrow \neg\varphi_n$, που επομένως δεν είναι ταυτολογία.

Αντιστρόφως, αν η $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1}) \rightarrow \neg\varphi_n$ δεν είναι ταυτολογία, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει απονομή αληθοτιμών που επαληθεύει τη $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1})$, επομένως και καθεμιά από τις προτάσεις που συμμετέχουν στη σύζευξη, αλλά δίνει αληθοτιμή 0 στην $\neg\varphi_n$. Αυτή λοιπόν είναι μια απονομή αληθοτιμών που καθιστά αληθείς όλες τις προτάσεις του συνόλου $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$

Θέμα 3: Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα προτάσεων Γ, Δ και προτάσεις φ, ψ, αν ισχύει ότι $\Gamma \models \varphi$ και $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$, τότε $\Gamma \cup \Delta \models \psi$.

Λύση: Αν v είναι μια απονομή αληθοτιμών που κάνει αληθείς τις προτάσεις του συνόλου $\Gamma \cup \Delta$, τότε κάνει αληθείς τόσο τις προτάσεις του συνόλου Γ, όσο και εκείνες του συνόλου Δ. Τότε, αφού $\Gamma \models \varphi$, έχουμε $v(\varphi) = 1$. Επομένως η v κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις του συνόλου $\Delta \cup \{\varphi\}$, και αφού $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$, παίρνουμε ότι $v(\psi) = 1$.

Θέμα 4: Εστω μια γλώσσα L της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει ένα σχεσιακό σύμβολο δυο θέσεων R και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\times$ και ένα σύμβολο σταθεράς 0. Αναφερόμαστε στον όρο $x \times y$ ως "το γινόμενο των x και y " και στο σύμβολο σταθεράς ως "το μηδέν".

α) Γράψτε προτάσεις της γλώσσας αυτής που να εκφράζουν ότι, η σχέση που ερμηνεύει το R, έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία που σχετίζονται, υπάρχει ένα τρίτο στοιχείο, διαφορετικό από αυτά, έτσι ώστε το πρώτο να σχετίζεται με το τρίτο και το τρίτο με το δεύτερο.

(ii) Αν τα γινόμενα δύο στοιχείων με το μηδέν ισούνται, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο ώστε το γινόμενό του με το πρώτο να ισούται με το δεύτερο ή το γινόμενο του με το δεύτερο να ισούται με το πρώτο.

β) Γράψτε προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των παραπάνω ιδιοτήτων, με τρόπο ώστε ο σύνδεσμος της άρνησης να εφαρμόζεται μόνο στο σχεσιακό σύμβολο R ή στο σύμβολο της ισότητας.

γ) Δώστε παραδείγματα δομών όπου επαληθεύονται οι παραπάνω προτάσεις (όχι υποχρεωτικά ταυτόχρονα, μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα για τη μία και ένα για την άλλη). (3 μονάδες)

Λύση: α) Οι ζητούμενες προτάσεις είναι

(i) $\forall x \forall y\ (R(x,y) \to\ \exists z(\neg(z=x) \wedge \neg(z=y) \wedge R(x,z) \wedge R(z,y))\ )$

(ii) $\forall x \forall y\ (x \times 0 = y \times 0\ \to\ \exists z((x \times z = y) \vee (y \times z = x))\ )$

β) Οι αρνήσεις των παραπάνω είναι ισοδύναμες, αντίστοιχα, με τις

(i) $\exists x \exists y\ (R(x,y) \wedge\ \forall z((z=x) \vee (z=y) \vee \neg R(x,z) \vee \neg R(z,y))\ )$

(ii) $\exists x \exists y\ (x \times 0 = y \times 0\ \wedge\ \forall z(\neg(x \times z = y) \wedge \neg(y \times z = x))\ )$

γ) Για να βρούμε δομές που επαληθεύουν τις προτάσεις του α) μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη σχέση R ως τη σχέση αυστηρής διάταξης είτε στους ρητούς ή στους πραγματικούς αριθμούς, τη σταθερά 0 ως το μηδέν και το $\times$ ως το συνηθισμένο πολλαπλασιασμό στους ρητούς ή στους πραγματικούς αριθμούς. Πράγματι λοιπόν η πρώτη επαληθεύεται γιατί, για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς, αν ο πρώτος είναι μικρότερος του δεύτερου, τότε υπάρχει αριθμός διαφορετικός από τους δύο δοθέντες, ο οποίος βρίσκεται ανάμεσά τους. Η δεύτερη πρόταση επαληθεύεται ως προς την ερμηνεία που προτείνουμε γιατί: Για οποιουσδήποτε δύο αριμούς, η υπόθεση ότι τα γινόμενά τους με το μηδέν ισούνται αληθεύει πάντα (αφού και τα δύο κάνουν μηδέν). Τότε, αν και τα δύο αυτά στοιχεία είναι διαφορετικά του μηδενός, υπάρχει στοιχείο (το πηλίκο του δεύτερου δια το πρώτο) που αν το πολλαπλασιάσουμε στο πρώτο δίνει το δεύτερο. Αν ένα από τα δύο είναι ίσο με μηδέν, τότε υπάρχει αριθμός (το μηδέν) που μπορεί να πολλαπλασιαστεί στο άλλο ώστε να δίνει το πρώτο.

Θέμα 5: Γράψτε μια πρόταση της Κατηγορηματικής Λογικής σ_n, τέτοια ώστε μια δομή $\mathcal{A}$ να την επαληθεύει αν και μόνο αν ο φορέας της δομής αυτής έχει τουλάχιστον n στοιχεία.

Υποθέστε, προς στιγμήν, ότι υπάρχει πρόταση σ, τέτοια ώστε μια δομή $\mathcal{A}$ να την επαληθεύει αν και μόνο αν ο φορέας της δομής αυτής είναι άπειρο σύνολο. Υπάρχει δομή που να επαληθεύει όλες τις προτάσεις του συνόλου

$$\Sigma = \{\sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg \sigma\}\ ;$$

Είναι δυνατό να υπάρχει πρόταση σ της Κατηγορηματικής Λογικής όπως αυτή που περιγράφει το προηγούμενο ερώτημα;

Λύση: Η πρόταση που επαληθεύεται σε μία δομή αν και μόνο αν ο φορέας της δομής αυτής έχει τουλάχιστον n στοιχεία είναι η

$$\exists x_1 \exists x_2\ ...\ \exists x_n\ (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge ... \wedge \neg(x_1 = x_n) \wedge ... \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)\ )$$

(για να επαληθεύεται αυτή η πρόταση σε μια δομή πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον n στοιχεία, τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους).

Αν υπάρχει στην Κατηγορηματική Λογική πρόταση που να αληθεύει σε μία δομή αν και μόνο αν ο φορέας της είναι άπειρο σύνολο, τότε η άρνησή της επαληθεύεται ακριβώς στις δομές που έχουν ως φορέα πεπερασμένο σύνολο. Δεν είναι δυνατό να επαληθεύεται η άρνηση μιας τέτοιας πρότασης σε μία δομή ταυτόχρονα με όλες τις προτάσεις σ_n, αφού η μεν άρνηση μιάς τέτοιας πρότασης λέει ότι ο φορέας του δομής είναι πεπερασμένο σύνολο, οι δε σ_1, σ_2,..., σ_n,... επαληθεύονται αν υπάρχουν τουλάχιστον ένα, δύο, ..., n, ... κλπ στοιχεία στο φορέα της δομής. Επομένως αν επαληθεύεται η άρνηση της σ πρέπει ο φορέας της δομής να έχει ένα πεπερασμένο πλήθος n στοιχείων και τότε η σ_{n+1} δε μπορεί να επαληθεύεται.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια σ, τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο Γ του

$$\Sigma = \{\sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\sigma\} \ ;$$

επαληθεύεται: Αν N είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο η σ_N εμφανίζεται στο Γ, τότε κάθε σύνολο με N στοιχεία επαληθεύει όλες τις προτάσεις του Γ. Από το Θεώρημα του Συμπαγούς τότε έπεται ότι όλο το σύνολο Σ επαληθεύεται σε κάποια δομή. Ομως είδαμε προηγουμένως ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό. Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο υποθέτοντας ότι υπάρχει μια τέτοια πρόταση σ. Αρα δεν υπάρχει πρόταση σ που να επαληθεύεται σε μία δομή αν και μόνο αν η δομή έχει ως φορέα ένα άπειρο σύνολο.