Ασκήσεις II

1. Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή Bernoulli, $\mathcal{B}(1, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$. Να δειχθεί ότι ο έλεγχος

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} X_i > c \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} X_i = c \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} X_i < c \end{cases}$$

είναι Ι.Ε. για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = 1/2$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 2/3$ και να δοθεί η ισχύς του ως συνάρτηση των c και γ. Θα αλλάξει η μορφή του Ι.Ε. εάν η $\mathcal{H}_0$ παραμείνει ως έχει, ενώ η $\mathcal{H}_1$ γίνει

α) $\mathcal{H}_1 : \theta = 4/5$

β) $\mathcal{H}_1 : \theta = 1/3$

γ) $\mathcal{H}_1 : \theta = 5/8$;

(Δικαιολογείστε την απάντησή σας)

2. Δίνεται δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ δύο ανεξαρτήτων παρατηρήσεων με $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(\theta + 1, 1)$. Θεωρούμε το πρόβλημα (Π) $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 1$. Είναι ο έλεγχος

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 + X_2 > 1/2 \\ 0, & X_1 + X_2 \leq 1/2 \end{cases}$$

Ι.Ε.; Να υπολογισθεί το μέγεθος και η ισχύς του $\phi(\underset{\sim}{X})$ ως συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων της $\mathcal{N}(0, 1)$.

3. Δίνεται δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, X_3)$ τριών ανεξαρτήτων παρατηρήσεων με κατανομές Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{P}(2\theta)$, $\mathcal{P}(3\theta)$ αντίστοιχα. Είναι ο έλεγχος

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 + X_2 + X_3 > c \\ \gamma, & X_1 + X_2 + X_3 = c \\ 0, & X_1 + X_2 + X_3 < c \end{cases}$$

Ι.Ε. για το (Π) $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 2$;

4. Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $f_1(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(x-1)}$, $x > 1$, $\theta > 0$.

α) Να δειχθεί ότι ο Ι.Ε. για το (Π) $\mathcal{H}_0 : \theta = 1/2$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 1$ έχει τη μορφή

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} X_i > c \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} X_i = c \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} X_i < c \end{cases}.$$

β) Για $n = 1$, να υπολογισθούν οι σταθερές c και γ έτσι ώστε ο $\phi(\underset{\sim}{X})$ να έχει δεδομένη ισχύ δ, με $\delta \in (0, 1)$.

γ) Για αυτήν τη τιμή των c και γ, και για $n = 1$, να υπολογισθεί το μέγεθος του $\phi(\underset{\sim}{X})$ ως συνάρτηση του δ.

δ) Για ποια από τα παρακάτω προβλήματα η μορφή του Ι.Ε. παραμένει όπως στο ερώτημα (α);

(Π1) $\mathcal{H}_0 : \theta = 1/2$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 2$

(Π2) $\mathcal{H}_0 : \theta = 1/2$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 1/3$

(Π3) $\mathcal{H}_0 : \theta = 1/2$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 2/3$

5. Δίνεται μία παρατήρηση X με πυκνότητα $f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta}$, $x > 0$, $\theta > 0$.

α) Να δειχθεί ότι ο έλεγχος που απορρίπτει την $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ υπέρ της $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$, με $\theta_1 > \theta_0$, όταν $\sqrt{X} > c$ είναι Ι.Ε.

β) Να δειχθεί ότι κάθε έλεγχος της $\mathcal{H}_0$ κατά της $\mathcal{H}_1$ μεγέθους e^{-1} έχει ισχύ το πολύ ίση προς $e^{-\theta_0/\theta_1}$.

6. Δίνεται δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ δύο ανεξαρτήτων παρατηρήσεων με κατανομές Γάμμα $\mathcal{G}(\alpha_1, \theta)$ και $\mathcal{G}(\alpha_2, \theta)$, όπου α_1, α_2 είναι γνωστές σταθερές. Να ευρεθεί η μορφή του Ι.Ε. για το (Π) $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 2$. Επιπλέον, για $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ να κατασκευασθεί ο Ι.Ε. μεγέθους $\alpha = 5\%$.

7. Δίνονται ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1, X_2, X_3 με γεωμετρικές κατανομές $\mathcal{G}e(1-\theta)$, $\mathcal{G}e(1-\theta^2)$, $\mathcal{G}e(1-\theta^3)$, $0 < \theta < 1$. Να βρεθεί η γενική μορφή του Ι.Ε. για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = 1/4$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = 1/2$. Επίσης να δοθεί (αναλυτικά) η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιούν οι αντίστοιχες σταθερές, ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α.
(Δίνεται ότι εάν $X \sim \mathcal{G}e(p)$ τότε $f(x) = pq^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$, και $\mathbb{E}X = 1/p$, $\mathbb{V}ar X = (1-p)/p^2$)