

130x100 με Θεωρία [Πιθανοτήτων - II] 10 Αδελφείς (337 = (1, x)H 34007190

#1. Η α.κ.σ.π. των X και Y δίνεται από τον τύπο $f(x, y) = c \{ x^2 + xy \}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ και $f(x, y) = 0$ αλλού, όπου c θετική σταθερά. Να βρεθούν (α) η σταθερά c , (β) $P(0 < X < 1/2, 0 < Y < 1/2)$, $P(X > 1/2)$, $P(X+Y < 1/2)$, $P(X+Y < 3/2)$, $P(X > Y)$, (γ) $P(Y < X < 2Y)$, (δ) οι περιθώριες συνάρτησεις πυκνότητας των X, Y . $f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = (x/2)(1+x)$ και $f_Y(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = (y/2)(1+y)$

#2. Η α.κ.σ.π. των X και Y δίνεται από τον τύπο $f(x, y) = cxy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ και $f(x, y) = 0$ αλλού, όπου c θετική σταθερά. Να απαντηθούν τα αντίστοιχα ερωτήματα (α), (β), (γ) της άσκησης (#1).

#3. Η από κοινού κατανομή των X και Y ονομάζεται (βυνελίς) ομοιόμορφη στο χώρο $B \subset \mathbb{R}^2$, όπου το B έχει θετικό και πεπεσμένο έμβαδόν (αν) η α.κ.σ.π. των X και Y είναι σταθερή στο B και μηδέν αλλού. Έστω ότι από κοινού κατανομή των X και Y είναι ομοιόμορφη στο στρίγνο $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x\}$. Να βρεθούν (α) ο τύπος της $f(x, y)$, (β) οι περιθώριες συνάρτησεις πυκνότητας των X και Y , (γ) $E(Y|X=1)$, (δ) $P(Y \leq 1/2 | X \geq 1)$.

#4. Η α.κ.σ.π. των X και Y δίνεται από τον τύπο $f(x, y) = c e^{-xy}$, $0 \leq x \leq y$ και $f(x, y) = 0$ αλλού. (α) Να βρεθούν και να αναγνωρισθούν οι περιθώριες συνάρτησεις πυκνότητας των X, Y . (β) Να βρεθεί και να αναγνωριστεί η δεσμευμένη κατανομή της $X|Y=y$, για κάθε $y > 0$, καθώς και $E(X|Y=y)$, $Var(X|Y=y)$. (γ) Να βρεθεί $P(X > Y/2)$. (δ) Να υπολογιστεί $E(X^n \cdot Y^m \cdot e^{2Y/2})$, όπου n και m φυσικοί αριθμοί.

#5. Αν η $X|Y=y$, όπου $y > 0$, έχει κατανομή Γάμμα $G(\alpha, \frac{1}{y})$ και η Y έχει εκθετική κατανομή $E(1)$, να βρεθούν (α) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της $Y|X=x$, για κάθε $x > 0$, και να αναγνωριστεί η κατανομή της $Y|X=x$, (β) $E(Y|X=x)$, $Var(Y^2|X=x)$. (Κατανομή $G(\alpha, \beta) : f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}$, $x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$)

#6. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $F(x, y) = 1$, αν $x+y \geq 1$ και $F(x, y) = 0$, αν $x+y < 1$ δεν είναι συνάρτηση κατανομής διδιστάτης τυχαίας μεταβλητής.

#7. (Η οικογένεια κατανομών των Farlie-Gumbel-Morgenstern) Έστω $F(x)$ και $G(y)$ δύο συνάρτησεις κατανομής. Για κάθε σταθερά a με $|a| \leq 1$,

ορίσουμε $H(x,y) = F(x)G(y)[1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y))]$. Μπορεί να δείχθει
 ότι $f_H = H_x(x,y)$ είναι διδιάστατη συνάρτηση κατανομής. (δηλαδή ικανο-
 ποιεί τις πέντε χαρακτηριστικές ιδιότητες). Να δείχθει ότι για κάθε
 $(\alpha) \in \mathbb{R}$, οι περιθώριες συνάρτησεις κατανομής είναι $F(x)$ και $G(y)$. Ειδι-
 κά για $\alpha = 0, 1, -1$ και $F(x) \neq G(x) \neq x, 0 \leq x \leq 1, F(x) \neq G(x) \neq 0, x > 1$
 και $F(x) = G(x) = 1, x \geq 1$, να γραφούν αναλυτικά οι διδιάστατες, οι
 συνάρτησεις κατανομής $H(x,y), H_1(x,y), H_2(x,y)$ και να δείχθει
 ότι αυτές τις τρεις περιπτώσεις οι περιθώριες κατανομές είναι ομοιό-
 μορφες στο $(0,1)$.

#8. Αν X, Y από κοινού κατανομή των X, Y είναι συνεχώς να δείχθει ότι
 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) f_Y(y) dy$ και αντίστοιχα για την $E(Y)$. Να δοθεί
 η αναλογική μορφή για τις $E(X)$ και $E(Y)$ στην περίπτωση διακριτής
 από κοινού κατανομής. Να γενικευθούν οι παραπάνω τύποι για τις
 $E(g(X))$ και $E(h(Y))$.

#9. Αν $X|Y$ έχει την γομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, $U(0,1)$, και
 δοθέντος ότι $X = x, 0 < x < 1$, η δεσμευμένη κατανομή της Y είναι $U(0,x)$,
 να βρεθούν $E(Y)$ και $Var(Y)$. (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα

#10. να υπολογιστεί $E(Y)$ και $Var(Y)$ με τη βοήθεια της ιδιότητας
 $E(Y) = \int_0^1 P(Y > y) dy$ και $Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$.
 Να υπολογιστεί $P(X > Y)$ και $P(X < Y)$.

#11. Αν X, Y από κοινού κατανομή των X, Y είναι συνεχώς να δείχθει ότι
 $E(X) = \int_0^1 P(X > y) dy$ και $E(Y) = \int_0^1 P(Y > x) dx$.
 Να υπολογιστεί $E(X)$ και $E(Y)$ για την περίπτωση που X, Y από κοινού
 κατανομή των X, Y είναι συνεχώς και $X|Y=y$ είναι γομοιόμορφη στο $(0,y)$.

#12. Αν X, Y από κοινού κατανομή των X, Y είναι συνεχώς να δείχθει ότι
 $E(X) = \int_0^1 P(X > y) dy$ και $E(Y) = \int_0^1 P(Y > x) dx$.
 Να υπολογιστεί $E(X)$ και $E(Y)$ για την περίπτωση που X, Y από κοινού
 κατανομή των X, Y είναι συνεχώς και $X|Y=y$ είναι γομοιόμορφη στο $(0,y)$.

#13. Αν X, Y από κοινού κατανομή των X, Y είναι συνεχώς να δείχθει ότι
 $E(X) = \int_0^1 P(X > y) dy$ και $E(Y) = \int_0^1 P(Y > x) dx$.
 Να υπολογιστεί $E(X)$ και $E(Y)$ για την περίπτωση που X, Y από κοινού
 κατανομή των X, Y είναι συνεχώς και $X|Y=y$ είναι γομοιόμορφη στο $(0,y)$.