

Ασκήσεις I

1. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Για το πρόβλημα ελέγχου της υπόθεσης $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ κατά της $\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$, ($\theta_1 > \theta_0$), έστω ο έλεγχος

$$\phi(X) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι $\alpha = \beta$ ($\alpha = P(\text{σφάλμα τύπου I}), \beta = P(\text{σφάλμα τύπου II})$).

β) Να δείχτεί ότι $\alpha \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

2. Ας θεωρήσουμε ότι ο χρόνος ζωής ηλεκτρικού λαμπτήρα εταιρείας Α ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\theta)$. Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι ο μέσος χρόνος ζωής των λαμπτήρων είναι πάνω από 6650h. Μία αντίπαλη εταιρεία Β ισχυρίζεται ότι ο μέσος χρόνος ζωής των λαμπτήρων της Α δεν ξεπερνά τις 6650h. Τυχαίο δείγμα 10 λαμπτήρων έδωσε τους εξής χρόνους (στρογγυλοποιημένους σε ώρες).

6252 6750 6803 6379 6774
6962 6632 6714 6599 6852

α) Να ελεγχθεί ο ισχυρισμός της εταιρείας Β σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%.

β) Χρησιμοποιώντας τον έλεγχο του ερωτήματος (α), ποια είναι η πιθανότητα εσφαλμένης απόφασης αν ο μέσος χρόνος ζωής είναι 6650h;

3. Βιομηχανία δημητριακών διαθέτει στο εμπόριο κουτιά δημητριακών σε συσκευασίες των 500gr (καθαρό βάρος). Η εταιρεία προστασίας καταναλωτών, για να διαπιστώσει μήπως η βιομηχανία εξαπατά το κοινό (δηλαδή τα κουτιά έχουν κατά μέσο όρο καθαρό βάρος μικρότερο των 500gr) έλαβε τυχαίο δείγμα 10 κουτιών, από το οποίο προέκυψαν τα εξής καθαρά βάρη: 503, 497, 498, 502, 495, 495, 502, 505, 490, 504. Ας υποθέσουμε ότι το καθαρό βάρος κουτιού ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\theta, 25)$.

α) Σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 10%, να ελεγχθεί εάν η βιομηχανία εξαπατά ή όχι το κοινό.

β) Ας υποθέσουμε ότι $\theta = 490$ (δηλαδή η βιομηχανία εξαπατά το κοινό). Χρησιμοποιώντας έλεγχο της μορφής του ερωτήματος (α), ποια είναι η πιθανότητα να μην αποκαλυφθεί η απάτη;

γ) Χρησιμοποιώντας τον ίδιο έλεγχο, ποια είναι η πιθανότητα να κατηγορηθεί άδικα η βιομηχανία;

4. Καθηγητής Ψυχολογίας ισχυρίζεται ότι η τυπική απόκλιση των βαθμών σε ένα τεστ νοημοσύνης μαθητών (IQ test) είναι 10. Σε τυχαίο δείγμα 23 μαθητών προέκυψε τυπική απόκλιση 12.16. Εάν οι βαθμοί ακολουθούν κανονική κατανομή, να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του Καθηγητού σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%.

5. Ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος μετάβασης μαθητού από το σπίτι στο σχολείο ακολουθεί κανονική κατανομή. Από προηγούμενη έρευνα έχει διαπιστωθεί ότι ο μέσος χρόνος μετάβασης είναι 12'. Όμως, μετά την κατασκευή μιας νέας κεντρικής οδού, σε τυχαίο δείγμα 25 μεταβάσεων ακολουθώντας τη νέα διαδρομή, παρατηρήθηκε μέσος χρόνος μετάβασης 11' και τυπική απόκλιση 1'. Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, παρέχουν τα δεδομένα αυτά ένδειξη ότι ο μέσος χρόνος μετάβασης στο σχολείο έχει όντως μειωθεί;

6. Δίνεται το τυχαίο δείγμα $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $3\theta^3/x^4$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$. Για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) θεωρούμε τον έλεγχο

$$\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{(1)} > c \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

όπου $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c , έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει ισχύ δ .

β) Για αυτή την τιμή του c , να υπολογιστεί το μέγεθος του ελέγχου και η πιθανότητα σφάλματος τύπου II.

7. Δίνεται το τυχαίο δείγμα $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $x^2/(9\theta^3)$, $0 < x < 3\theta$, $\theta > 0$. Για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) θεωρούμε τον έλεγχο

$$\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{(n)} > c \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

όπου $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c , έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει πιθανότητα σφάλματος τύπου II, έστω δ , $0 < \delta < 1$.

β) Για αυτή την τιμή του c , υπολογίστε την ισχύ και το μέγεθος του παραπάνω ελέγχου.

8. Καπνοβιομηχανία ισχυρίζεται ότι τα τσιγάρα της περιέχουν κατά μέσον όρο το πολύ 25 mgr νικοτίνης. Σε τυχαίο δείγμα 16 τσιγάρων η μέση τιμή της νικοτίνης ήταν 26.4 mgr με τυπική απόκλιση 2 mgr. Εάν η ποσότητα νικοτίνης ακολουθεί κανονική κατανομή, σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%, παρέχουν τα δεδομένα του δείγματος επαρκή ένδειξη κατά του ισχυρισμού της βιομηχανίας;

($z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.960$, $t_{15,0.05} = 1.753$, $t_{15,0.025} = 2.131$)

9. Έστω $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ τ.δ. από την κατανομή $f(x; \theta) = \frac{2(1-x)}{(1-\theta)^2}$, $\theta \leq x \leq 1$, $\theta < 1$. Για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ $\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 < \theta_0$) θεωρούμε τον έλεγχο $\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{(1)} < c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Να υπολογιστεί η σταθερά c έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει ισχύ δ , $0 < \delta < 1$. Για αυτή την τιμή του c να υπολογιστεί το μέγεθος του ελέγχου.

10. Βιομηχανία πλαστικών υψηλής αντοχής ισχυρίζεται ότι ένα προϊόν της μπορεί να αντέξει φορτίο κατά μέσο όρο τουλάχιστον 505 κιλά ανά m^2 . Σε τυχαίο δείγμα 16 πλαστικών καταγράφηκαν τα εξής φορτία αντοχής (στρουγγυλεμένα ~~σε κιλά~~): 480, 505, 510, 520, 490, 517, 508, 530, 470, 522, 524, 485, 494, 501, 509, 512. Αν το φορτίο αντοχής ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή θ κιλά και διασπορά 64 (m^2), να ελεγχθεί ο ισχυρισμός της βιομηχανίας σε μέγεθος (επίπεδο σημαντικότητας) 5%. ($z_{0.05} \approx 1.645$, $z_{0.025} \approx 1.96$, $t_{15,0.05} \approx 1.75$).