

Θεωρία Πιθανοτήτων II Ασκήσεις 1

1. Μια κάλπη περιέχει 3 λευκές και 3 μαύρες μπάλες. Από την κάλπη επιλέγονται τυχαία δύο μπάλες, η μια μετά την άλλη, χωρίς επανάθεση. Ορίζουμε τις τ.μ. X και Y , όπου η X λαμβάνει την τιμή 1 ή 0 αν η πρώτη μπάλα είναι λευκή ή μαύρη αντίστοιχα, και η Y λαμβάνει την τιμή 1 ή 0 αν η δεύτερη μπάλα είναι λευκή ή μαύρη αντίστοιχα. Να βρεθούν (α) η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y , (β) οι συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y , (γ) η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y , (δ) η πιθανότητα $P(X \geq Y)$.
2. Η διδιάστατη τ.μ. (X, Y) έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y) = c(x + y), x = 0, 1, y = 0, 1, 2$. Να βρεθούν (α) η σταθερά c , (β) οι πιθανότητες $P(X^2 = Y), P(X + Y = 2)$, (γ) οι συναρτήσεις πιθανότητας των X, Y .
3. Η διδιάστατη τ.μ. (X, Y) έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y) = \frac{c}{2^{x+3y}}, x = 0, 1, 2, \dots, y = 0, 1, 2, \dots$. Να βρεθούν (α) η σταθερά c , (β) οι συναρτήσεις πιθανότητας των X, Y , (γ) οι πιθανότητες $P(X = Y), P(X \leq Y), P(X \geq Y + 1)$.
4. Θεωρούμε δύο (ανεξάρτητες) ρίψεις ενός τέλει ζαριού. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X, Y στις εξής περιπτώσεις. (α) X είναι η ένδειξη της πρώτης ρίψης και Y είναι το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ρίψεων, (β) X είναι η μικρότερη των δύο ενδείξεων και Y είναι η μεγαλύτερη.
5. Η διδιάστατη τ.μ. (X, Y) έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y) = \frac{c}{2^{x+3y}}, x = 0, 1, 2, \dots, y = 0, 1, 2, \dots$ και $x \geq y$. Να βρεθούν (α) η σταθερά c , (β) οι συναρτήσεις πιθανότητας των X, Y , (γ) οι πιθανότητες $P(X = Y), P(X \leq Y), P(X < Y), P(X \geq Y + 1)$.
6. Κάλπη περιέχει 6 σφαίρες, αριθμημένες 1, 2, ..., 6. Από την κάλπη επιλέγονται τυχαία n σφαίρες, η μια μετά την άλλη, με επανάθεση, $n \geq 2$. Έστω X η τ.μ. που λαμβάνει την τιμή 1 ή 0 αν η πρώτη σφαίρα που επιλέγεται φέρει περιττό ή άρτιο αριθμό, αντίστοιχα. Έστω Y η τ.μ. που παριστάνει το πλήθος των σφαιρών που φέρουν περιττό αριθμό, μεταξύ των n που επιλέγονται. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y .
7. Στην Άσκηση 6, ας υποθέσουμε ότι η επιλογή των σφαιρών γίνεται χωρίς επανάθεση και ότι $n = 3$. Ορίζουμε τις τ.μ. X, Y όπως στην Άσκηση 6. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y .