

Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων

Ιανουάριος 2014

1. 1. Λύστε τις εξισώσεις $z^4 = 2^4$, $e^z = i$.
2. Ορίστε τον κύριο κλάδο του $\log z$ και σχεδιάστε το μέρος του επιπέδου που η συνάρτηση $\text{Log}(z - i)$ είναι αναλυτική.
3. Βρείτε τις τιμές της έκφρασης i^i .
4. Δώστε τον ορισμό της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς και υπολογίστε την ακτίνα της $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3} z^{n^2}$.
2. 1. Αποδείξτε ότι υπάρχει (δεν είναι υποχρεωτικό να την βρείτε) ακεραία συνάρτηση με πραγματικό μέρος $2x^3 - 6xy^2 - 1$, $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Βρείτε τα σημεία που η συνάρτηση $(x + iy)^4 - (x - iy)^4$, $x, y \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και σε αυτά υπολογίστε την παράγωγο. Στη συνέχεια εξετάστε την συνάρτηση ως προς την παραγωγισιμότητα.
3. 1. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις e^z , $\cos z$, $\sin z$ $z \in \mathbb{C}$ και κάθε πολύνομο βαθμού ≥ 1 δεν είναι φραγμένες.
2. Αν για ακεραία συνάρτηση f ισχύουν $f'(\frac{1}{n^2}) = 3f(\frac{1}{n^2})$ $n = 1, 2, \dots$ και $f(0) = 0$ αποδείξτε ότι είναι η μηδενική.
4. 1. Αποδείξτε ότι για κάθε ακεραία συνάρτηση f και κάθε διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη γ ισχύει $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^5} dz = \frac{1}{12} \int_{\gamma} \frac{f''(z)}{z^3} dz$.
2. Υπολογίστε το $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+i)^n}$.
5. 1. Αν $\gamma(t) = e^{-it}$ $t \in [0, 8\pi]$ να υπολογιστεί με βάση τον τύπο ο δείκτης στροφής $n(\gamma, 0)$. Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz$, $\int_{\gamma} \cos \frac{1}{z} dz$, $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^n} dz$, n ακέραιος.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Εγκαταλείψτε υποχρεωτικά ένα θέμα.

Καλή Επιτυχία