

# Εξέταση στην Αλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

7 Φεβρουαρίου 2019

**Θέμα 1:** Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα. Εξετάστε αν είναι ανάγωγα ή αναλύστε τα πλήρως σε γινόμενο ανάγωγων στον αντίστοιχο δακτύλιο

$$\begin{aligned}x^{12} + 16x^6 + 64 &\in \mathbb{Z}[x] & x^7 + 49x^5 + 35x^3 + 21x + 7 &\in \mathbb{Q}[x] \\4x^5 - 8x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x - 2 &\in \mathbb{R}[x] & x^3 - x^2 + x - 1 &\in \mathbb{C}[x]\end{aligned}$$

**Θέμα 2:** Θεωρούμε ένα σώμα  $K$  ένα στοιχείο του  $a \in K$  και το υποσύνολο του πολυωνυμικού δακτυλίου επί του  $K$

$$I = \{f \in K[x] \mid f(a) = 0\}$$

Αποδείξτε ότι είναι ιδεώδες κι εξετάστε αν είναι κύριο κι αν είναι πρώτο.

**Θέμα 3:** Θεωρείστε γνωστό ότι η συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  με  $\varphi(x) = ([x]_m, [x]_n)$  είναι ομομορφισμός.

- (α) Με ποιό ιδεώδες του  $\mathbb{Z}$  ισούται ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού;
- (β) Πείτε τι γνωρίζετε για το αν και πότε είναι επί αυτός ο ομομορφισμός

**Θέμα 4:** Αποδείξτε ότι το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

( $a \neq 0$ ) με πράξη τον πολλαπλασιασμό είναι υποομάδα της ομάδας των αντιστρέψιμων  $2 \times 2$  πινάκων. Εξετάστε αν είναι κανονική υποομάδα.

**Θέμα 5:** (α) Περιγράψτε την ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου  $\mathbb{Z}_9$  καθώς και όλες τις υποομάδες της.

(β) Εξετάστε αν ένα σύνολο 5 στοιχείων μπορεί να έχει μετάθεση τάξης 6 καθώς και τάξης 16. Αν όχι, πείτε για ποιό λόγο. Αν ναι, δώστε παράδειγμα τέτοιας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ