0.1 Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων, Ιούνιος 2013

1. (1.8) α. Με την χρήση της τριγωνομετρικής παράστασης μιγαδικού αριθμού επιβεβαιώστε ότι σε κάθε κανονικό εξάγωνο το μήκος της ακτίνας του είναι ίσο με το μήκος της πλευράς του.

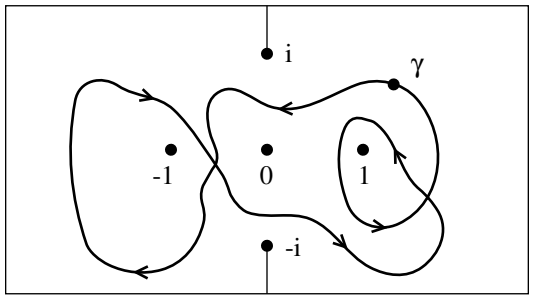
   β. Αν $a = \dfrac{\sqrt{2} + \imath\sqrt{2}}{2}$ εξετάστε αν αληθεύουν οι σχέσεις $Log(a^3) = 3Loga$,$Log(a^5) = 5Loga$ και βρείτε τις τιμές της έκφρασης $a^\imath$.

2. (1.8) Αν $f(z) = z\bar{z}^2 - 2z$, $z \in \mathbb{C}$, βρείτα τα σύνολα παραγωγισιμότητας, αναλυτικότητας της f και υπολογίστε την $f'(z)$ όπου υπάρχει.

3. (1.3) Δώστε τον μαθηματικό ορισμό του δείκτη στροφής και στη συνέχεια συνδυάζοντάς τον με την εποπτική του ερμηνεία υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)dz$ όπου

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+i} - \frac{5}{z-i} - \frac{4}{z+1}$$

   και γ η καμπύλη του σχήματος



Σχήμα 1:

4. (3.2) Διατυπώστε το Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων και με την κατάλληλη εφαρμογή του υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \sin\frac{1}{z}dz \ , \ \int_{C(0,\frac{1}{2})} \sin(e^{-\imath t})e^{\imath t}dt, \ \int_{C(0,\frac{1}{2})} \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}dz \text{ και } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx,$$

   όπου γ είναι η καμπύλη του προηγούμενου σχήματος και $C(0, \frac{1}{2})$ η καμπύλη $\frac{1}{2}e^{\imath t}, t \in [0, 2\pi]$.

5. (1.8) Διατυπώστε το Θεώρημα ταυτισμού και με κατάλληλη εφαρμογή του αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική ακέραια συνάρτηση με $f(\frac{1}{n}) = n\sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \ldots$.

6. (2.5), (για βαθμό άριστα 10 απαιτείται η πλήρης επίλυση του θέματος αυτού). Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Carosati-Weierstras . Στη συνέχεια αποδείξτε ότι αν μια αναλυτική συνάρτηση έχει μεμονωμένο ανώμαλο σημείο το μηδέν , δεν είναι τοπικά φραγμένη σε αυτό και ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 1$ τότε το μηδέν είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης. Δώστε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης.