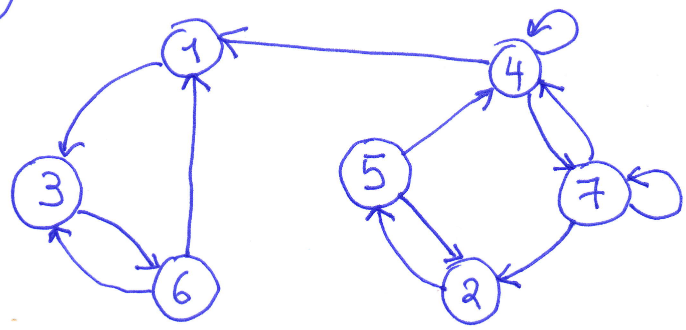
ΛΥΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2019

1



α) Υπάρχουν 2 κλάσεις επικοινωνίας: Η κλειστή κλάση $C_1 = \{1,3,6\}$ και η ανοικτή $T = \{2,4,5,7\}$.
Οι καταστάσεις της C_1 είναι απεριοδικές, αφού π.χ. ξεκινώντας από την 3 μπορείς να επιστρέψεις σ' αυτήν σε 2 ή 3 ή πολλαπλάσια αυτών βήματα.
Επιπλέον, οι καταστάσεις της T είναι επίσης απεριοδικές αφού $P_{44} = 1/4 > 0$ (δηλ. η 4 απερ. και επειδή όλες επικοινωνούν, οι υπόλοιπες είναι επίσης απεριοδικές).

β) [illegible]

Έστω $v_i = E(\tilde{T} \mid X_0 = i)$, όπου

$$\tilde{T} = \min\{n : X_n \in \quad \}.$$

Από ανάλυση 1ου βήματος,

$$\left.\begin{aligned}
v_7 &= 1 + \tfrac{1}{4} v_2 + \tfrac{1}{2} v_4 + \tfrac{1}{4} v_7 \\
v_4 &= 1 + \tfrac{1}{4} v_4 + \tfrac{1}{2} v_7 \\
v_5 &= 1 + \tfrac{1}{2} v_2 + \tfrac{1}{2} v_4 \\
v_2 &= 1 + 1 \cdot v_5
\end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

Η λύση του (Σ) δίνει $v_7 = \frac{96}{15} \simeq 6.4$ βήματα.

γ) ~~Λύση~~

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \end{array}\right) \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{A} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

→ Εύρεση οριακής κατ/μής την C_1.

Η C_1 ως κλειστή κλάση επικοινωνούντων κατ/σεων με πεπερασμένο αριθμό κατ/σεων είναι θετικά επαναληπτική. Από α) είναι επίσης αδιαχώριστη και απεριοδική, οπότε $\exists$ η οριακή κατ/μη και ταυτίζεται με την στάσιμη κατ/μη.

Έστω $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}, \quad i,j \in C_1$.

$$(\pi_1, \pi_3, \pi_6) = (\pi_1, \pi_3, \pi_6) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sum_{j \in C_1} \pi_j = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_6 \\ \pi_3 = \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_6 \\ \pi_6 = \pi_3 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_6 \\ \pi_3 = \pi_6. \end{array}$$

$$\pi_1 + \pi_3 + \pi_6 = 1 \Rightarrow \pi_6 \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_6 = \frac{2}{5}, \quad \pi_3 = \frac{2}{5}, \quad \pi_1 = \frac{1}{5}.$$

Προφανώς $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \,, \quad i \in C_1,\ j \in T.$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \,, \quad i,j \in T$$

Ψάχνω τα $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = ? \,, \quad i \in T,\ j \in C_1$

Έστω
$$f_{iC_1} = P\left(S < \infty \mid X_0 = i \right), \quad i \in T$$
και
$$S = \min\{n : X_n \in C_1\}.$$

$$\left.\begin{aligned}
f_{2C_1} &= f_{5C_1} \\
f_{4C_1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} f_{4C_1} + \frac{1}{2} f_{7C_1} \\
f_{5C_1} &= \frac{1}{2} f_{2C_1} + \frac{1}{2} f_{4C_1} \\
f_{7C_1} &= \frac{1}{4} f_{2C_1} + \frac{1}{2} f_{4C_1} + \frac{1}{4} f_{7C_1}
\end{aligned}\right\} (\Sigma_1)$$

Η λύση του (Σ_1) είναι
$$f_{4C_1} = f_{5C_1} = f_{2C_1} = f_{7C_1} = 1.$$

Άρα
$$\lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)} = f_{2C_1} \cdot \pi_1 = \frac{1}{5}.$$
$$\lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)} = f_{2C_1} \cdot \pi_3 = \frac{2}{5}$$
$$\lim_{n\to\infty} p_{26}^{(n)} = f_{2C_1} \cdot \pi_6 = \frac{3}{5}$$

$\vdots$

Ανάλογα υπολογίζονται τα υπόλοιπα.

α) Έστω $A_n \equiv$ # πελατών που φθάνουν στο slot n

$S_n =$ # πελατών που εξυπηρετούνται στο slot n.

A_n είναι Bernoulli τ.μ. με $E(A_n) = p$

S_n » » » με $E(S_n) = q$.

$$X_{n+1} = X_n + (A_n - S_n)^+$$

όπου $(x)^+ = \max(0, x)$.

Επομένως η $\{X_n\}$ είναι ΔΤΜC με $E = \{0, 1, 2, \dots\}$

Έστω

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad i, j \in E$$

Τότε

$P_{0,0} = 1 - p \cdot (1-q)$, $P_{01} = p \cdot (1-q)$

$P_{i,i+1} = p \cdot (1-q)$, $i \geq 1$

$P_{i,i-1} = q \cdot (1-p)$, $i \geq 1$

$P_{i,i} = p \cdot q + (1-p) \cdot (1-q)$, $i \geq 1$.

β) <u>Θ. Pakes</u>

Αν $\{X_n\}$ αδιαχ., απεριοδική ΔΤΜC με $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ και αν για

$$d(i) = E(X_{n+1} - X_n \mid X_n = i), \quad i \in E$$

ισχύουν

i) $d(i) < \infty \quad \forall i \in E$

ii) $\limsup_{i \in E} d(i) < 0$

η $\{X_n\}$ είναι θετ. επαναλ.

$$d(i) = E(X_{n+1} - X_n \mid X_n = i) = \sum_{j \in E} P_{ij} \cdot j - i$$

$$d(0) = \sum_{j \in E} P_{0j} \cdot j - 0 = 0 \cdot P_{00} + 1 \cdot P_{01} - 0 = p$$

$$d(1) = \sum_{j \in E} P_{1j} \cdot j - 1 = 0 \cdot P_{10} + 1 \cdot P_{11} + 2 \cdot P_{12} - 1 =$$

$$= pq + (1-p)(1-q) + 2 \cdot p(1-q) - 1$$

$$= 2p(1-q) - p \cdot (1-q) - q \cdot (1-p)$$

$$= p \cdot (1-q) - q(1-p).$$

$$d(2) = \sum_{j \in E} \cdot j \, P_{2j} - 2 = 1 \cdot P_{21} + 2 \cdot P_{22} + 3 P_{23} - 2 =$$

$$= q(1-p) + 2\Big(pq + (1-p)(1-q)\Big) + 3 \cdot p \cdot (1-q) - 2$$

$$= q(1-p) + 2 \cdot \big(pq + (1-p)(1-q) - 1\big) + 3p(1-q)$$

$$= q(1-p) - 2\big(p \cdot (1-q) + q \cdot (1-p)\big) + 3p(1-q)$$

$$= p \cdot (1-q) - q(1-p)$$

$\vdots$

Συνεχίζοντας $\quad d(i) = p(1-q) - q(1-p), \quad \forall i \geq 1.$

Άρα $\quad d(i) < \infty \quad \forall i \in E$

και $\quad \limsup_{i \in E} d(i) = p(1-q) - q(1-p) < 0 \Rightarrow$

$$p(1-q) < q(1-p) \Rightarrow p - pq < q - qp \Rightarrow \boxed{p < q}$$

γ) Αν $\mathbb{P} = (p_{ij})$, $i,j \in E$ και

$\underset{\sim}{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ με $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$ $i,j \in E$.

Η αναζήτηση του $\underset{\sim}{\pi} = \underset{\sim}{\pi} \cdot \mathbb{P}$ ή των ολικών εξισώσεων ισορροπίας δίνει

$$\pi_0 = \pi_0 \cdot \left(1 - p(1-q)\right) + \pi_1 q(1-p) \Rightarrow$$

$$\pi_0 \cdot p(1-q) = \pi_1 \cdot q(1-p) \Rightarrow \pi_1 = \frac{p \cdot (1-q)}{q(1-p)} \cdot \pi_0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \rho \cdot \pi_0}$$

με $\rho = \dfrac{p(1-q)}{q(1-p)}$.

$$\pi_1 = \pi_1 \left(pq + (1-p)(1-q)\right) + \pi_0 \cdot (1-q)p + \pi_2 \cdot q \cdot (1-p) \Rightarrow$$

$$\pi_0 \cdot \rho \left(1 - pq - (1-p)(1-q) - q(1-p)\right) = \pi_2 \, q \cdot (1-p) \Rightarrow$$

$$\pi_0 \cdot \rho \cdot p \cdot (1-q) = \pi_2 \cdot q \cdot (1-p) \Rightarrow \pi_2 = \rho \cdot \frac{p \cdot (1-q)}{q(1-p)} \pi_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi_2 = \rho^2 \pi_0}$$

Συνεχίζουμε. . . . $\pi_j = \rho^j \pi_0$, $j \geq 0$.

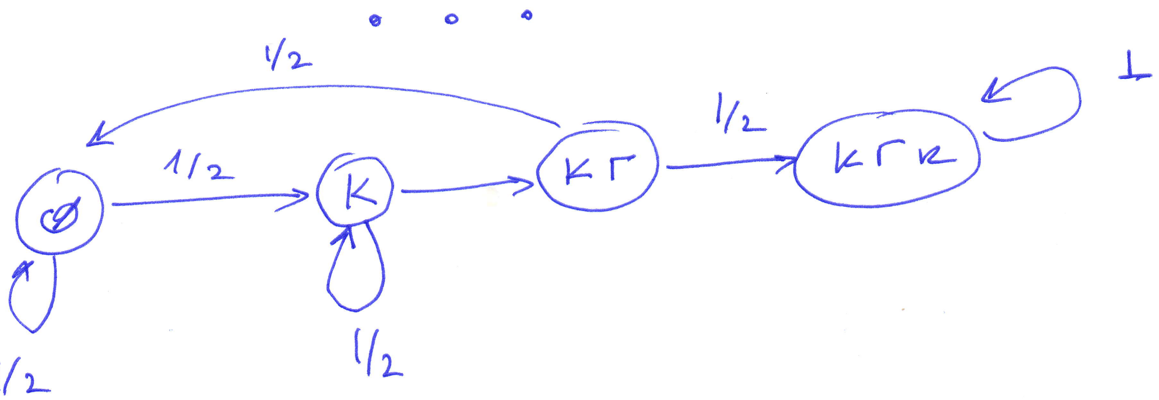
Όμως $\sum_{j \in E} \pi_j = 1 \Rightarrow \pi_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = 1 \xrightarrow[(B)]{\rho < 1}$

$$\pi_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$$

Άρα $\pi_j = (1-\rho) \cdot \rho^j$, $j \geq 0$ με

$$\rho = \frac{p(1-q)}{q(1-p)} < 1.$$

(3) A) Όρισε ως ΚΓΚ τον στόχο σου. Θεωρούμε μια DTMC που ξεκινά από την κατ/ση ∅ και θέλουμε να απορροφηθεί στην ΚΓΚ.
Αν στην 1η ρίψη φέρουμε Κ, μεταβαίνουμε στη Κ με πιθ/τα 1/2. Αν φέρουμε Γ, θα παραμείνουμε στη ∅, έχουμε "σπατάλη" μία μονάδα του χρόνου.



Μετονόμαση σε κατ/σεις

∅ → 0

Κ → 1

ΚΓ → 2

ΚΓΚ → 3

Αν φ(i) ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων για να φτάσουμε στη ΚΓΚ, ξεκινώντας από την i, τότε

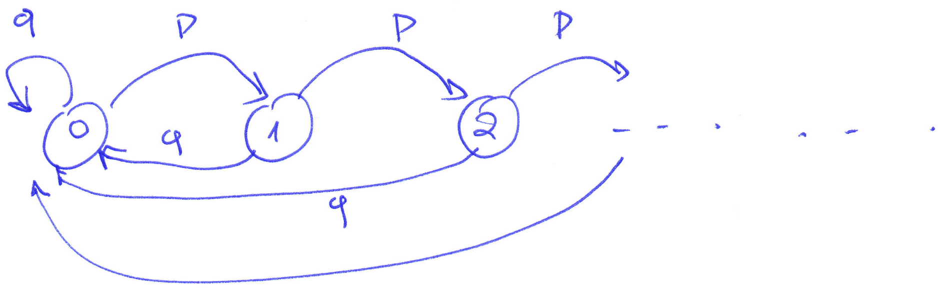
$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 + \tfrac{1}{2}\varphi(0) + \tfrac{1}{2}\varphi(1) \\ \varphi(1) &= 1 + \tfrac{1}{2}\varphi(1) + \tfrac{1}{2}\varphi(2) \\ \varphi(2) &= 1 + \tfrac{1}{2}\varphi(0) + \tfrac{1}{2}\varphi(3) \\ \varphi(3) &= 0 \end{aligned}\right\} (\Sigma) \Rightarrow$$

Η λύση του (Σ) δίνει $\underline{\underline{\varphi(0) = 10}}$

β) α) Αν X_n το κεφάλαιο του παίκτη μετά τη n-οστή ρίψη τότε $E=\{0,1,2,\dots\}$ και

$$X_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{με } q=1-p \\ X_n+1 & \text{με } p \end{cases}$$

Άρα η $\{X_n\}$ είναι ΔΤΜC. Με διάγραμμα μεταβάσεων



Η $\{X_n\}$ είναι αδιαχώριστη. Για να δείξω ότι είναι θετ. επαναληπτική, αρκεί να εξετάσω μια κατάσταση. Έστω την 0.

$$f_{00}^{(n)} = P\left(X_n=0,\ X_r\neq 0,\ r=1,2,\dots,n-1 \mid X_0=0\right).$$

$$f_{00}^{(n)} = P_{01}\cdot P_{12}\cdot\dots\cdot P_{n-2,n-1}\cdot P_{n-1,0}$$

$$= \underbrace{p\cdot p\cdot\dots\cdot p}_{n-1}\cdot q$$

$$= p^{n-1}\cdot q, \quad n\geq 1$$

Άρα η πιθ/τα επιστροφής στην 0 είναι

$$f_0^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = q\cdot\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = \frac{q}{1-p} = \frac{q}{q} = 1.$$

Άρα η 0 είναι <u>επαναληπτική</u>

Ψάχνω για μέσο χρόνο επιστροφής στην 0.

$$m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q \cdot p^{n-1} = q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{n-1}$$

$$= q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dp} \cdot p^{n} = q \cdot \frac{d}{dp} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{n} \right) =$$

$$= q \cdot \frac{d}{dp} \cdot \left(\frac{1}{1-p} \right) = \frac{q}{(1-p)^2} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q} < \infty$$

Άρα η 0 ~~θετικά~~ επαναλ. $\Rightarrow$ η $\{X_n\}$ θετικά επαναλ.

B) Αφού η $\{X_n\}$ εργοδική $\Rightarrow \exists$ η οριακή κατ/νη.

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \quad , i, j \in E.$$

Ψάχνω το π_5.

Από τις ολικές εξ. ισορροπίας:

$$\pi_0 = q \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \Rightarrow \pi_0 = q$$

$$\pi_1 = p \, \pi_0 \Rightarrow \pi_1 = pq$$

$$\pi_2 = p \cdot \pi_1 \Rightarrow \pi_2 = p^2 \cdot q$$

$$\vdots$$

$$\pi_i = p^i q \quad , i \geq 0$$

Άρα $\pi_5 = p^5 \cdot q$

γ) $$\pi_{10} = \frac{1}{m_{10,10}} \Rightarrow m_{10,10} = \frac{1}{\pi_{10}} = \frac{1}{q \cdot p^{10}}.$$

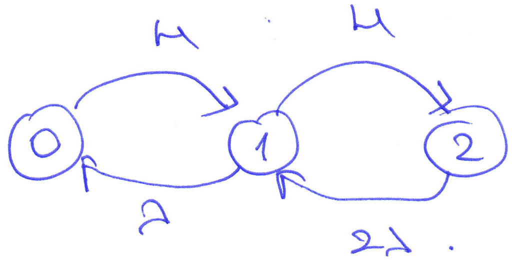
4

α) Αν $X(t)=0 \Rightarrow$ όλες οι μηχανές σε βλάβη.
Επομένως ο τεχνικός επισκευάζει την 1 από αυτές.
Άρα αν τη χ.σ. t "μπω" στο σύστημα και βλέπω
ο μηχ. σε λειτουργία, τότε η επόμενη κατ/ση
θα είναι η 1. Άρα ο χρόνος μέχρι να
μεταβεί στην κατ/ση 1 είναι ο υπολοιπόμενος
χρόνος επισκευής μιας από τις μηχανές. Δηλαδή
~~Άρα από~~ $\exp(\mu)$.
Ομοίως αντιμετωπίζεται και για τις υπόλοιπες:
Αν $X(t)=2$, τότε και οι 2 είναι σε λειτουργία.
Η επόμενη κατ/ση θα είναι η 1. Άρα ο χρόνος
μέχρι να μεταβεί στη 1 είναι ο minimum των
χρόνων ζωής των 2 μηχ. $\equiv \min\{X_1, X_2\}$

με $X_i \sim \exp(\lambda)$.
Άρα $\min\{X_1, X_2\} \sim \exp(2\lambda)$.

~~Άρα για κάθε t~~
Άρα η γνώση της κατ/σης της $X(t)$ κάθε χ.σ. t
είναι ικανή να μας δώσει τη μελλοντική της, η
$\{X(t)\}$ είναι CTMC. με $E=\{0,1,2\}$.

β)



$$Q = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -\mu & \mu & 0 \\ 1 & \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 2 & 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{array}$$

γ) $\pi_j = \lim_{t\to\infty} P(X(t)=j)$, $j=0,1,2$.

$\underset{\sim}{\pi} \cdot Q = \underset{\sim}{0}$, $\sum_j \pi_j = 1$

$$\left.\begin{aligned} \mu \pi_0 &= \lambda \pi_1 \\ (\mu+\lambda)\pi_1 &= \mu \pi_0 + 2\lambda \pi_2 \\ 2\lambda \pi_2 &= \mu \pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda}\pi_0 = \rho \pi_0$$

$$\rho\pi_0(\mu+\lambda-\lambda) = 2\lambda\pi_2 \Rightarrow 2\lambda\pi_2 = \rho\pi_0 \cdot \mu \Rightarrow$$

$$\pi_2 = \frac{\rho^2}{2}\pi_0$$

$$\pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_0\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}\right) = 1 \to$$

$$\pi_0 = \frac{2}{2(1+\rho)+\rho^2}$$

$$\pi_j = \frac{\rho^j}{j!}\left(\frac{2}{2(1+\rho)+\rho^2}\right), \; j=0,1,2.$$

Ψάχνω το $\pi_0 = \dfrac{2}{2(1+\rho)+\rho^2}$.

5

X_n = κατ/ση του μηχ. την n-οστή ημέρα.

$E = \{0, 1, 2\}$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & (1-p)q & (1-p)(1-q) \\ 0 & q & 1-q \\ (1-r)p & (1-r)(1-p) & r \end{pmatrix} \end{array}$$