

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Στοχαστικές Διαδικασίες

Ημερομηνία: 7-2-2019
 Εξεταστής: Ι. Δημητρίου

Ώρα: 12:00-15:00

1. [Μονάδες: 2] Δίνεται μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(α') Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.

(β') Να βρεθεί ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής της αλυσίδας στις παροδικές καταστάσεις αν υποθέσουμε ότι ξεκινάμε από την κατάσταση 7.

(γ') Να υπολογιστούν οι $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}$, $i, j \in E$.

2. [Μονάδες: 2.5] Θεωρείστε ένα σύστημα αναμονής σε διακριτό χρόνο (slot) και άπειρο χώρο αναμονής. Στην αρχή κάθε slot μπορεί να συμβεί είτε μια νέα άφιξη με πιθανότητα p , είτε μια αναχώρηση με πιθανότητα q (με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν πελάτες). Για λόγους μοντελοποίησης υποθέτουμε ότι αν μια άφιξη και μια αναχώρηση συμβούν στο ίδιο slot, η άφιξη προηγείται. Έστω X_n ο αριθμός των πελατών στην αρχή του n -οστού slot.

(α') Αιτιολογείστε γιατί η $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα και να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης 1ου βήματος.

(β') Αφού διατυπωθεί το θεώρημα του Pakes, να δείξετε ότι η συνθήκη ευστάθειας είναι $p < q$.

(γ') Να υπολογιστεί η οριακή κατανομή της $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$.

3. **A** [Μονάδες: 1.5] Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται επανειλημμένα, με κάθε ρίψη να είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε άλλη. Αφού ορίσεται μια κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα να υπολογιστεί τον αναμενόμενο αριθμό ρίψεων μέχρι να φέρουμε ΚΓΚ.

B [Μονάδες: 1.5] Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται επανειλημμένα, με κάθε ρίψη να είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε άλλη. Όταν το αποτέλεσμα είναι Κ (με πιθανότητα p), ο παίκτης κερδίζει 1 ευρώ. Αν έρθει Γ (με πιθανότητα $q = 1 - p$) ο παίκτης χάνει όλα του τα χρήματα. Το παιχνίδι συνεχίζεται ακόμα και όταν ο παίκτης χάσει όλα του τα χρήματα. Αν X_n το κεφάλαιο του παίκτη μετά την n -οστή επανάληψη,

(α') ναδειχθεί ότι η $\{X_n\}$ είναι θετικά επαναληπτική.

(β') Να το ποσοστό του χρόνου που ο παίκτης έχει 5 ευρώ.

(γ') Αν ο παίκτης έχει 10 ευρώ, να βρεθεί ο μέσος χρόνος (δηλ. ο μέσος αριθμός επαναλήψεων του παιχνιδιού) που απαιτείται για να επιστρέψει για πρώτη φορά ξανά στα 10 ευρώ.

4. [Μονάδες: 1.5] Θεωρείστε μια μονάδα παραγωγής με δύο μηχανές. Οι μηχανές λειτουργούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη και ο χρόνος ζωής κάθε μιας προέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ . Υπάρχει ένας τεχνικός, ο οποίος επισκευάζει τις βλάβες των μηχανών. Ο χρόνος επισκευής κάθε μηχανής προέρχεται από την εκθετική κατανομή παραμέτρου μ . Έστω $X(t)$ ο αριθμός των μηχανών που βρίσκονται σε λειτουργία την χρονική στιγμή t .

(α') Να αιτιολογηθεί γιατί η $\{Q(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου.

(β') Να κατασκευαστεί ο απειροστός γεννήτορας της $\{Q(t), t \geq 0\}$.

(γ') Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου που και οι δυο μηχανές είναι σε βλάβη.

5. [Μονάδες: 1.5] Ένα μηχάνημα επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας και ανάλογα με την κατάσταση λειτουργίας του κατατάσσεται σε μια από τις τρεις καταστάσεις: 0 (τέλεια λειτουργία), 1 (μερική λειτουργία), 2 (βλάβη). Η μηχανή παραμένει σε τέλεια λειτουργία για χρόνο που προέρχεται από την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p . Μόλις παρέλθει αυτός ο χρόνος το μηχάνημα περνά είτε στη κατάσταση 1 με πιθανότητα g είτε στη 2 με πιθανότητα $1 - g$. Αν βρεθεί στην κατάσταση 1, το μηχάνημα παραμένει σε αυτή τη κατάσταση για χρόνο που προέρχεται από την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο q και μόλις αυτός λήξει περνά στην κατάσταση 3. Όταν βρεθεί στην κατάσταση 3, το μηχάνημα αρχίζει άμεσα να επισκευάζεται. Ο χρόνος επισκευής σε ημέρες προέρχεται από την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο r και μόλις ολοκληρωθεί, το μηχάνημα περνά στη κατάσταση 0 είτε στην 1 με πιθανότητες f και $1 - f$ αντίστοιχα. Οι διαδοχικοί χρόνοι τέλειας λειτουργίας, μερικής λειτουργίας και επισκευής είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι. Έστω X_n η κατάσταση του μηχανήματος την n -οστή ημέρα. Ναδειχθεί ότι η $\{X_n\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα και να κατασκευαστεί ο πίνακας μετάβασης πρώτου βήματος.