

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.

Πρόχειρες σημειώσεις για ελεύθερο ψάρεμα λαθών.

Το κείμενο αποτελεί την τελική μου πρόταση για τις ανάγκες ενός εξαμηνιαίου προπτυχιακού μαθήματος που στο τέλος ιδιαίτερα τις ξεπερνάει . Το τελευταίο μέρος περιέχει μιά αντιπροσωπευτική λίστα σχεδόν λυμένων ασκήσεων επανάληψης. Στις λύσεις τους έχουν παραληφθεί σκόπιμα λεπτομέρειες που αφορούν είτε τις πράξεις είτε πιο ολοκληρωμένες αναφορές στην αντίστοιχη θεωρία. Ο αναγνώστης μπορεί να γεμίσει εύκολα τα κενά αυτά είτε ανατρέχοντας στην αντίστοιχη θεωρία είτε στα συναφή παραδείγματα που την συνοδεύουν.

Θα θεωρήσω τιμή μου οποιοδήποτε μήνυμά σας στην ηλεκτρονική διεύθυνση samaris@math.upatras.gr με κρίσεις, παρατηρήσεις, υποδείξεις ακόμη και υποψίες λαθών.

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Μιγαδικοί αριθμοί- προβολή σε γεωμετρική σκηνοθεσία

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να προβάλλεται στο σήμερα η αρχική εμφάνιση, η συμπεριφορά, η διαδρομή και οι περιπέτειες των εννοιών που αποτέλεσαν “επαναστατικές τομές” στην ανάπτυξη των μαθηματικών, μέχρι να κατακτήσουν την πλήρη νομιμοποίησή τους. Ο τρόπος που εισβάλουν απρόσκλητες στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων είναι εντυπωσιακός. Απείθαρχες και αυθάδεις πολλές φορές σε σχέση με τους κρατούντες κανόνες, αφού βάλουν ένα χεράκι εξαφανίζονται σαν φαντάσματα χωρίς να αφήσουν κανένα ίχνος τους στο τελικό αποτέλεσμα. Αν συναντήσουν φιλόξενο πνεύμα, τα φαντάσματα ξεθαρρεύουν και επανέρχονται πιο τολμηρά και δραστήρια. Τον χαρακτηρισμό φαντάσματα που απέρχονται, τον χρησιμοποίησε ο Αρχιεπίσκοπος Μπέρκλεϋ για τα μυστηριώδη απειροστά dx, dy . Σε πρώτη ανάγνωση φαινόταν να έχει δίκιο που τον ενοχλούσε η προκλητική συμπεριφορά τους να χρησιμοποιούν διπλή ταυτότητα και να εμφανίζονται τότε σαν μηδενικές και τότε σαν μη μηδενικές ποσότητες. Όταν πολλαπλασιάζονται εξαφανίζονται με τον μηδενισμό τους, ενώ αντίθετα η διαίρεση dy/dx είναι η πράξη της γονιμοποίησή τους από την οποία την στιγμή της ταυτόχρονης εξαφάνισής τους γεννιέται, όχι “φάντασμα”, αλλά φυσιολογικό παιδί του μαθηματικού κόσμου, η πραγματική παράγωγος. Πώς όμως να αποδεχθεί κανείς σαν ταχυδακτυλουργία μια διαδικασία που

έκανε “αληθινά θαύματα” δίνοντας σημαντικά και απολύτως ακριβή αποτελέσματα σε ιδιαίτερα δύσκολα προβλήματα. Στη συνέχεια όμως, με την ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού, αποκαλύφθηκε ότι δεν υπήρχαν θαύματα και φαντάσματα αλλά είχαμε να κάνουμε με “μασκαρεμένους γείτονες της διπλανής μας πόρτας” που στη συνέχεια εντάχθηκαν με την αυστηρότητα που αρμόζει στην μαθηματική οικογένεια για να την κάνουν σοφότερη και πλουσιότερη.

Κάπως έτσι συνέβη και με τον φανταστικό αριθμό i με την περιέργη ιδιότητα $i^2 = -1$. Στην αρχή έκανε την εμφάνισή του σαν εργαλείο σε τυπικούς ενδιάμεσους, αλλά όχι κατ'ανάγκη εύκολους υπολογιστικούς χειρισμούς, στη συνέχεια αναβάθμιζε την παρουσία του σε πιο σύνθετα προβλήματα έως ότου εδραιωθεί, αποκαλυφθεί και απομυθοποιηθεί πλήρως. Σήμερα είμαστε σε θέση να διασκευάσουμε, χωρίς να προσβάλλουμε ελπίζω, το ιστορικό σενάριο, δίνοντάς του την ιδανική εκδοχή που θα μας βόλευε, και σε μια γεωμετρική σκηνοθεσία να αναιρέσουμε με θετικό τρόπο τον φανταστικό χαρακτήρα του i , αποκαλύπτοντας ότι σε τελευταία ανάλυση ο παραπάνω αριθμός είναι τόσο φανταστικός όσο και ο αριθμός ένα.

Ας θεωρήσουμε προσωρινά ότι το μαθηματικό μας “σύμπαν” είναι μια ευθεία που έχει “βαφτίσει” τα σημεία της με τους αντίστοιχους πραγματικούς αριθμούς και ότι έξω από αυτή τα πάντα είναι “σκότος”. Η πράξη $A(+5) + B(-8) = \Gamma(-3)$ σε κίνηση επί της ευθείας σημαίνει πέντε μονάδες δεξιά (+) από το μηδέν και στη συνέχεια οκτώ μονάδες αριστερά (-) από το $A(+5)$ με αποτέλεσμα να βρεθούμε στο σημείο $\Gamma(-3)$. Ο πολλαπλασιασμός επί θετικό τον πολλαπλασιάζει το μέτρο και τελειώνει. Ο πολλαπλασιασμός επί αρνητικό συνεχίζει τη διαδικασία με την “όπισθεν” έως ότου φτάσουμε στο συμμετρικό του ως προς την αρχή. Αν ανάψουμε το φώς τότε βλέπουμε την οριζόντια ευθεία στην άπειρη επίπεδη οθόνη που κάθε σημείο της A είναι βαφτισμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες με το αντίστοιχο ζεύγος $A_k(x, y)$, και σε πολικές συντεταγμένες $A_p(r, \theta)$. Τα σημεία της αρχικής ευθείας στο νέο “σύμπαν” έχουν το προνόμιο να είναι τριπλοβαπτισμένα. Οι πράξεις που μάθαμε γενικεύονται εύκολα στο νέο περιβάλλον του διανυσματικού χώρου για να περιγράψουν εκτός από οριζόντιες κινήσεις δεξιά και αριστερά και κατακόρυφες προς τα άνω ή κάτω. Η πράξη $(-3, 5) + (4, 9) = (1, -4)$ περιγράφει την μετατόπιση από το πρώτο σημείο $A_k(-3, 5)$, 5 μονάδες οριζόντια δεξιά και στη συνέχεια 4 μονάδες κατακόρυφα και κάτω, οπότε καταλήγουμε στη θέση $B_k(1, -4)$. Με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό εκτός από την διαστολή ή συστολή των διανυσμάτων

πραγματοποιούνται στροφές μηδέν ή 180 μοιρών αποκλειστικά , ανάλογα με το αν πολλαπλασιάζουμε με θετικό ή αρνητικό αριθμό αντίστοιχα.

Μια καταρχήν διαπίστωση μετά πρώτη μας απόπειρα είναι ότι συγκριτικά με τον πλούτο των στροφών και την ανάγκη της μαθηματοποίησής τους οι πράξεις είναι φτωχές και δυσκίνητες. Γι αυτό σβήνουμε πάλι τα φώτα για να κάνουμε μια νέα απόπειρα, κρατώντας σαν χρήσιμο δώρο από την προηγούμενη διαδικασία την τριπλή ονομασία των σημείων της αρχικής ευθείας.

Αν αντιστοιχίσουμε τούς πολλαπλασιασμούς

$$3 \cdot 4 = 12, (-3) \cdot 4 = -12, (-3) \cdot (-4) = +12$$

σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} A_p(3, 0) \cdot B_p(4, 0) &= \Gamma_p(12, 0), A_p(3, \pi) \cdot B_p(4, 0) = \Gamma_p(12, \pi), \\ A_p(3, \pi) \cdot B_p(4, \pi) &= \Gamma_p(12, 2\pi) \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια ο πολλαπλασιασμός εκφράζει την εντολή του πολλαπλασιαστή στον πολλαπλασιαστέο “πολλαπλασιάσου με το μέτρο μου και στρίψε όσο το όρισμά μου” ή ισοδύναμα ο πολλαπλασιασμός σε πολικές συντεταγμένες αντιστοιχεί στη σχέση

$$A_p(r_1, \theta_1) \cdot B_p(r_2, \theta_2) = \Gamma_p(r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι έχουμε φυλακίσει στα όρια της ευθείας έναν γενικότερο κανόνα που μαθηματοποιεί τις στροφές σε όλο το επίπεδο, γι αυτό ανάβουμε αμέσως τα φώτα και τον αφήνουμε ελεύθερα να πετάξει και να κατευθύνει τον πολλαπλασιασμό τυχαίων μη μηδενικών στοιχείων του επιπέδου.

Εφαρμόζοντας τον προηγούμενο επεκτεταμένο κανόνα για το σημείο $I_k(0, 1) = I_p(1, \pi/2)$ έχουμε

$$I_p(1, \pi/2)I_p(1, \pi/2) = I_p(1, \pi) = I_k(-1, 0)$$

δηλαδή το αποτέλεσμα ταυτίζεται με το σημείο που στην αρχική μοναχική ευθεία ήταν βαπτισμένο -1 . Αν το παραπάνω σημείο $I_k(0, 1) = I_p(1, \pi/2)$ το βαπτίσουμε i , όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του στρέφεται θετικά κατά 90 μοίρες και ταυτίζεται με το -1 .

Ελπίζω με την γεωμετρική σκηνοθεσία να πείσαμε, όπως είχαμε προαναγγείλει, ότι το i δεν είναι περισσότερο φανταστικός από την μονάδα όταν το “σύμπαν” δεν είναι η ευθεία αλλά το επίπεδο. Τον έχουμε στην ουσία ξαναγνωρίσει στα διανύσματα σαν το δεύτερο μοναδιαίο στοιχείο της κανονικής βάσης (κατακόρυφη μονάδα) μόνο που μας έλειπε η πράξη του πολλαπλασιασμού διανυσμάτων για να περιγράψουμε τις στροφές τους. (Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων δεν είναι ο πολλαπλασιασμός που περιγράψαμε διότι είναι εξωτερική πράξη, δηλαδή το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός και όχι διάνυσμα)

Από την σχέση

$$A_p(r, \theta) \cdot B_p(1/r, -\theta) = \Gamma_p(1, 0) = \Gamma_k(1, 0)$$

προκύπτει ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει αντίστροφο.

Αν

$$A_k(x_1, y_1) = A_p(r_1, \theta_1), \quad (x_1 = r_1 \cos \theta_1, y_1 = r_1 \sin \theta_1)$$

$$B_k(x_2, y_2) = A_p(r_2, \theta_2), \quad (x_2 = r_2 \cos \theta_2, y_2 = r_2 \sin \theta_2)$$

Εφαρμόζοντας τους τριγωνομετρικούς τύπους του αθροίσματος γωνιών έχουμε

$$\begin{aligned} A_k(x_1, y_1) \cdot B_k(x_2, y_2) &= \Gamma_p(r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2) = \\ &\Gamma_k(r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2), r_1 \cdot r_2 (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2)) = \\ &\Gamma_k(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

Η προηγούμενη σχέση μας αποκαλύπτει το μυστικό για μια αυστηρή γενίκευση του πολλαπλασιασμού από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$.

Η προβολή τελείωσε και αφού ζητήσουμε συγνώμη αν η διασκευή, η σκηνοθετική απόπειρα και η ενδεχόμενη φλυαρία τους προκάλεσαν κάποια χρηστά μαθηματικά ήθη, παριστάνοντας ότι ποτέ δεν είδαμε την παραπάνω προβολή, κρατώντας όμως ένα αντίγραφο στο μυαλό μας προχωρούμε σε μια αυστηρή θεμελίωση του σώματος των μιγαδικών αριθμών.

1.2 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ που ορίζονται ως εξής:

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ τότε ορίζουμε

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2)$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να αποδείξει ότι το $\mathbb{R}^2$ ως προς τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού έχει την δομή σώματος, δηλαδή ισχύουν

1. $z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$ και $z \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z = z$
για κάθε $z \in \mathbb{R}^2$ (υπάρχουν ουδέτερα στοιχεία των πράξεων)
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ (οι πράξεις είναι αντιμεταθετικές).
3. Η εξίσωση $z + Z = 0$ έχει μοναδική λύση ως προς Z για κάθε $z \in \mathbb{R}^2$
(υπάρχει ο αντίθετος $-z$).
4. Αν $z = (x, y) \neq (0, 0)$ η εξίσωση $z \cdot Z = (1, 0)$ έχει μοναδική λύση
 $Z = (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$ (υπάρχει ο αντίστροφος z^{-1}).
5. Για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ ισχύει
 $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση).

Από δώ και στο εξής για το προηγούμενο σύνολο θα χρησιμοποιούμε και εμείς το σύμβολο $\mathbb{C}$, θα το ονομάζουμε σύνολο μιγαδικών αριθμών ή μιγαδικό επίπεδο και τα στοιχεία του μιγαδικούς αριθμούς ή σημεία του μιγαδικού επιπέδου.

Αν ορίσουμε $L(x) = (x, 0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι ισχύουν:

$$L(xy) = (xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = L(x) \cdot L(y)$$

και

$$L(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = L(x) + L(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε σχέση με τις προσθέσεις και τους πολλαπλασιασμούς τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R} \times \{0\}$ έχουν την ίδια δομή και με την έννοια αυτή μπορούν να θεωρηθούν ταυτόσημα, “βαπτίζοντας” κάθε $(x, 0)$ με την συντομογραφία του x . Σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα η παραπάνω ταύτιση είναι ισομορφισμός και τα σώματα είναι ισόμορφα.

(Για κάποιον που έχει “φιλοσοφικές διαφορές” με αυτού του είδους την ταύτιση και αρνείται να αποδεχθεί την σχέση $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, η απαίτησή του μπορεί να ικανοποιηθεί αφαιρώντας από το $\mathbb{R}^2$ το $\mathbb{R} \times \{0\}$ αντικαθιστώντας το με το $\mathbb{R}$ προσαρμόζοντας κατάλληλα τον ορισμό των πράξεων.)

Με βάση την παραπάνω ταύτιση, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$i \cdot y = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$$

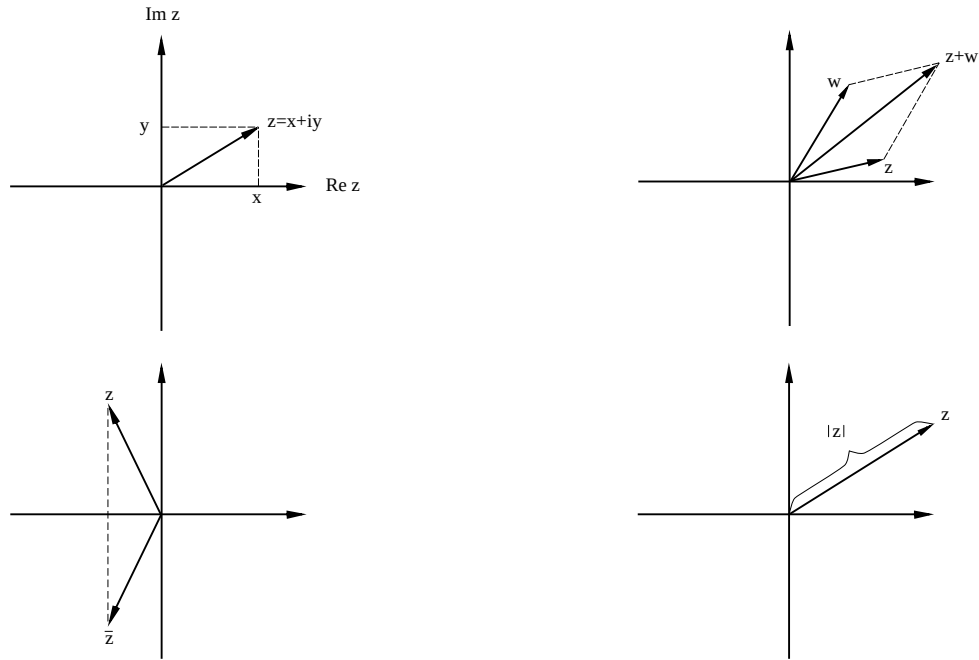
και

$$x + iy = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Η μορφή $z = x + iy$ κυριαρχεί στη βιβλιογραφία από την ισοδύναμη $z = (x, y)$, ίσως για λόγους ιστορικούς, ίσως επειδή είναι πιο εύχρηστη, ίσως για να εκφραστεί καλύτερα η ενότητα του ζεύγους σαν ενιαίο στοιχείο του σώματος $\mathbb{C}$, ίσως για όλα αυτά μαζί. Στις παραπάνω μορφές το x ονομάζεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Re} z$ και το y φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Im} z$. Στο σημείο αυτό πρέπει να προσέχουμε την “ιστορική λαχκούβα” που το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι πραγματικός και όχι φανταστικός αριθμός. Όσον αφορά την πρόσθεση μπορούμε τους μιγαδικούς αριθμούς να τους θεωρούμε και σαν διανύσματα του επιπέδου με αρχή το μηδέν. Με την προσθήκη του πολλαπλασιασμού έχουμε έναν “πιο πλούσιο” διανυσματικό χώρο στον οποίο μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε διανύσματα αντιμετωπίζοντάς τα σαν ενιαία μαθηματικά αντικείμενα εισάγοντας στην μελέτη μας με οργανωμένο μαθηματικό τρόπο και τις στροφές τους. Προκειμένου να το κάνουμε αυτό αποτελεσματικά θα χρειαστούμε ορισμένα απλά μεγέθη και σχέσεις σε “μιγαδική γλώσσα”.

1.3 Το μιγαδικό επίπεδο.

Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ορίζουμε σαν συζυγή του z τον αριθμό $\bar{z} = x - iy$ που γεωμετρικά συμβολίζει το συμμετρικό του σημείου z ως προς τον άξονα των x και μέτρο του z τον αριθμό $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Σχήμα 1.1:

Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
- $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $\bar{\bar{z}} = z$
- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} iz$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} iz$

Χρήσιμες είναι επίσης οι σχέσεις

$$\operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z},$$

z φανταστικός (ισοδύναμα γράφουμε $z \in i\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

Αν $z \neq 0$ τότε,

$$\operatorname{Re}(az) = a\operatorname{Re} z \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \text{ και } \operatorname{Im}(az) = a\operatorname{Im} z \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

Σχετικά με το μέτρο εύκολα αποδείχνονται οι σχέσεις

$$|zw| = |z||w|, |z/w| = |z|/|w|, |\bar{z}| = |z|$$

Από τον συνδυασμό των προηγούμενων προκύπτουν οι παρακάτω χρήσιμες ισότητες

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= (z + w)(\bar{z} \pm \bar{w}) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 \pm z\bar{w} \pm \bar{z}w = \\ &= |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \end{aligned}$$

και

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Η δεύτερη σχέση γεωμετρικά εκφράζει την γνωστή πρόταση ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του. Βρείτε ποιο θεώρημα της ευκλείδειας εκφράζει η πρώτη σχέση. (Είναι συχνό το λάθος στην εφαρμογή των παραπάνω τύπων οι φοιτητές να εξαφανίζουν τα απόλυτα και τις μπάρες των συζυγών, για τον λόγο αυτό επισημαίνουμε την επαγρύπνηση που πρέπει να υπάρχει απέναντι στη δύναμη της αδράνειας που προκύπτει από τους αντίστοιχους τύπους των πραγματικών αριθμών.)

Μερικές απλές χρήσιμες ανισότητες σε πρώτη ζήτηση είναι οι παρακάτω

$$\operatorname{Re} z, \operatorname{Re}(-z), \operatorname{Im} z, \operatorname{Im}(-z) \leq |z|$$

που γίνονται ισότητες εάν

$$z \in \mathbb{R}_0^+, z \in \mathbb{R}_0^+, -iz \in \mathbb{R}_0^+, iz \in \mathbb{R}_0^+ \text{ αντίστοιχα,}$$

όπου $\mathbb{R}_0^+$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

Πρόταση 1.3.1. (Τριγωνική ανισότητα)

Για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών ισχύει

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

Αν $w \neq 0$ η ισότητα στο δεξιό σκέλος ισχύει αν $z = kw$ με $k \geq 0$ και στο αριστερό σκέλος όταν $z = kw$ με $k \leq 0$.

Απόδειξη. Υψώνοντας στο τετράγωνο καταλήγουμε στις ισοδύναμες ανισότητες

$$-|z||w| \leq \operatorname{Re} z \bar{w} \leq |z||w|$$

Η ισότητα στο δεύτερο σκέλος με βάση τις αρχικές στοιχειώδεις ανισότητες που δώσαμε ισοδυναμεί με

$$z \bar{w} = \frac{z|w|^2}{w} = k \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{ή} \quad z = \frac{k}{|w|^2} \cdot w$$

Προφανές είναι τώρα και το άλλο σκέλος. □

Μια πολύ καλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας που η περίπτωση της ισότητας παίζει αποφασιστικό ρόλο είναι η παρακάτω.

Εφαρμογή 1.3.1. Να αποδειχθεί ότι κάθε έλλειψη έχει ακριβώς μία διάμετρο της οποίας να υπολογιστεί το μήκος .

Απόδειξη. Θεωρούμε την έλλειψη $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| + |z - b| = c\}$ με $|b - a| < c$ και θα αναζητήσουμε το $\max\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}$.

Θεωρούμε την ανισότητα $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - a| + |a - z_2|$, που γίνεται ισότητα μόνο όταν $\frac{z_1 - a}{\lambda} = z_2 - a$ με $\lambda < 0$ και την $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - b| + |b - z_2|$ που γίνεται ισότητα μόνο όταν $\frac{z_1 - b}{\mu} = z_2 - b$ με $\mu < 0$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $|z_1 - z_2| \leq 2c$.

Αν υπάρχει ζεύγος διαφορετικών σημείων της έλλειψης ώστε παραπάνω σχέση να γίνεται ισότητα τότε το φράγμα $2c$ θα ήταν ίσο με το ζητούμενο μήκος και σε κάθε τέτοιο ζεύγος θα αντιστοιχούσε μία διάμετρος.

Αναγκαία συνθήκη για να συμβεί η ισότητα είναι προφανώς να έχουμε ισότητα στις δύο προηγούμενες τριγωνικές ανισότητες.

Αν επιλέξουμε την γεωμετρική ερμηνεία των ισοτήτων, από την πρώτη παίρνουμε ότι τα σημεία z_1, z_2, a ανήκουν στην ίδια ευθεία και από την δεύτερη τα z_1, z_2, b ανήκουν επίσης στην ίδια ευθεία, οπότε τα σημεία z_1, z_2 ανήκουν στην ευθεία που περνάει από τα a, b , που σημαίνει ότι καθένα από αυτά ικανοποιεί εξίσωση της μορφής $z = a + x(b - a), x \in \mathbb{R}$.

Από την σχέση $|z - a| + |z - b| = c$ παίρνουμε

$$|b - a|(|x| + |1 - x|) = c \text{ με } |x| + |1 - x| > 1,$$

που ισοδυναμεί με $x < 0$ ή $x > 1$.

Για $x < 0$ παίρνουμε

$$x = \frac{1}{2} - \frac{c}{2|b - a|} \text{ και } z_1 = a + (b - a)\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2|b - a|}\right)$$

και για $x > 1$ παίρνουμε

$$x = \frac{1}{2} + \frac{c}{2|b - a|} \text{ και } z_2 = a + (b - a)\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2|b - a|}\right)$$

Είναι τώρα φανερό η σχέση $|z_1 - z_2| = c$ και η μοναδικότητα του ζεύγους, δηλαδή της διαμέτρου.

(Αν μας είχαν θέσει περιορισμό να μην επιλέξουμε γεωμετρική ερμηνεία προκειμένου να ασκηθούμε στην άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών τότε από την πρώτη ισότητα παίρνουμε

$$z_1 - a = \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{\lambda - 1}$$

την δεύτερη

$$z_1 - b = \frac{\mu(z_1 - z_2)}{\mu - 1}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε το $z_1 - z_2$ σαν πραγματικό πολλαπλάσιο του $a - b$, το αντικαθιστούμε στη συνέχεια στις προηγούμενες ισότητες παίρνουμε ισότητες της μορφής $z = a + x(b - a), x \in \mathbb{R}$. $\square$

Με την γενίκευση του πολλαπλασιασμού, δηλαδή την μαθηματικοποίηση των στροφών, εμπλουτίσαμε τουλάχιστον διαχειριστικά τη γεωμετρία αλλά και την άλγεβρα στο επίπεδο επιτυγχάνοντας μια προωθημένη ενοποίησή τους. Τίποτα όμως δεν καταχτιέται χωρίς θυσίες. Στην περίπτωση μας η θυσία είναι η έλλειψη

διάταξης συμβατής με το σώμα. Με άλλα λόγια στο σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν επεκτείνουμε την διάταξη των πραγματικών αριθμών όχι διότι δεν γίνεται αλλά και να το κάναμε δεν θα κερδίσαμε τίποτα επειδή ο πολλαπλασιασμός ομόσημων δεν θα έδινε πάντα θετικό αποτέλεσμα. Η δύναμη της αδράνειας από τους πραγματικούς αριθμούς που προαναφέραμε είναι και σε αυτό το σημείο ισχυρή, όπως δείχνουν οι περιπτώσεις που οι φοιτητές κάνουν συγκρίσεις μιγαδικών αριθμών με τα σύμβολα $\leq, \geq, <> \sup, \inf, \min, \max$.

1.3.1 Όρισμα Μιγαδικού Αριθμού

Στο σώμα των μιγαδικών αριθμών μπήκαμε από την πόρτα της τριγωνομετρίας με κλειδιά το ημίτονο και το συνημίτονο και την πίστη ότι τα γνωρίζουμε πολύ καλά. Αν η πίστη μας βασίζεται αποκλειστικά σε όσα μάθαμε στην τριγωνομετρία του λυκείου πρέπει να την μετριάσουμε διότι για να αντέξουν σε υψηλότερες απαιτήσεις μαθηματικής αυστηρότητας οι γνώσεις μας πρέπει να στερεωθούν καλύτερα. Για να ορίσουμε τότε το ημίτονο θεωρούσαμε αυτονόητη την έννοια μήκους τόξου μόνο που την δανειζόμαστε από την φυσική, δηλαδή φανταζόμαστε το τόξο σαν καμπύλη από κλωστή που την τεντώνουμε και μετράμε το μήκος της. Αυτή βέβαια η "έξωμαθηματική" φυσική εικόνα αξίζει του σεβασμού μας γιατί προδίδει και τον αυστηρό ορισμό της έννοιας του μήκους. Με την βοήθεια όμως των ολοκληρωμάτων ή των πραγματικών δυναμοσειρών οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ορίστηκαν αυστηρά και δεν θα έβλαπτε ένα φρεσκάρισμα. Μπορούσαμε βέβαια να ακολουθήσουμε μια άλλη δομή σαν να μην έχουμε ακούσει τίποτα για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και να τους ορίσουμε αυστηρά από την αρχή σε γενικότερη μορφή. Δεν υιοθετήσαμε αυτή την εκδοχή διότι έχουν μπει τόσο πολύ στη ζωή μας που δεν βρήκαμε αρκετά επιχειρήματα να τους βάλουμε στην καραντίνα έστω και για λίγο. Υποσχόμαστε ότι στην κατάλληλη στιγμή θα κάνουμε μια αναφορά στην διαδικασία που αναφέραμε. Εκείνο όμως που προτείνουμε στον αναγνώστη είναι να αποδείξει σαν άσκηση του απειροστικού λογισμού την μοναδικότητα του ημιτόνου και συνημιτόνου, δηλαδή αν για ένα ζεύγος (S, C) πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ισχύει $S' = C, C' = -S, S(0) = 1 - C(0) = 0$ τότε είναι μοναδικό.

Ορισμός 1.3.1. Αν $z = x + iy \neq 0$, με όρισμα του z ($\arg z$) ορίζουμε το

σύνολο των κοινών λύσεων των εξισώσεων

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|}, \sin \theta = \frac{y}{|z|}.$$

Αν θ μία λύση της παραπάνω εξίσωσης δηλαδή $\theta \in \arg z$ τότε ισχύει

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Είναι φανερό ότι σε τυχόν διάστημα $(a, a+2\pi]$ ότι υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου $\arg z$ και το συμβολίζουμε με $\text{Arg}_a z$. (Χρησιμοποιούμε το κεφαλαίο Άλφα για να κάνουμε την διάκριση ανάμεσα στην συνάρτηση $\text{Arg}_a z$ και το σύνολο $\arg z$. Παρά το γεγονός ότι το $\arg z$ είναι σύνολο και όχι συνάρτηση δεν θα αποφύγουμε κάποιες φορές το ιστορικό κεκτημένο να γράφουμε $\theta = \arg z$ αντί $\theta \in \arg z$. Για να μετριάσουμε την παράβαση ας κάνουμε την συμφωνία να κατανοούμε την έκφραση $= \arg z$ ενιαία σαν εναλλακτικό συμβολισμό της $\in \arg z$).

Ορίζουμε σαν κύριο όρισμα ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z το $\text{Arg}_{-\pi} z$ και θα το συμβολίζουμε με $\text{Arg} z$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός ή φανταστικός εάν και μόνο εάν ισχύουν

$$|\frac{\pi}{2} - \text{Arg} z| = \frac{\pi}{2} \text{ ή } |\text{Arg} z| = \frac{\pi}{2}$$

αντίστοιχα.

Σχετικά με την συνέχεια της συνάρτησης $\text{Arg}_a z$ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.3.2. Η συνάρτηση $\text{Arg}_a z$ είναι συνεχής στο σύνολο

$$C_a = \mathbb{C} - \cup \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}_a z = a + 2\pi\} \cup \{0\}$$

και ασυνεχής στην ημιευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}_a z = a + 2\pi\}$.

Απόδειξη. Θα την αποδείξουμε για το κύριο όρισμα. Από την πραγματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι

$$(\tan t)' = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

οπότε η συνάρτηση αντιστρέφεται συνεχώς στην $\text{Arc}(\tan x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν $\theta = \text{Arg} z$ τότε

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\text{Im} z}{\text{Re} z + |z|}$$

οπότε από την σχέση $\text{Arg} z = 2 \text{Arctan} \frac{\text{Im} z}{\text{Re} z + |z|}$ προκύπτει η συνέχεια στα σημεία που δεν ανήκουν στον αρνητικό ημιάξονα.

Αν $a < 0$, θεωρούμε τις ακολουθίες

$$z_n = |a| \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) \right)$$

και

$$w_n = |a| \left(\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{n}\right) + i \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{n}\right) \right)$$

που και οι δύο συγκλίνουν στο a αλλά,

$$\text{Arg} z_n = \pi - \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$$

και

$$\text{Arg} w_n = -\pi + \frac{\pi}{n} \rightarrow -\pi$$

Η απόδειξη στην γενικότερη περίπτωση προκύπτει με στοιχειώδεις παρεμβάσεις στην παραπάνω διαδικασία.

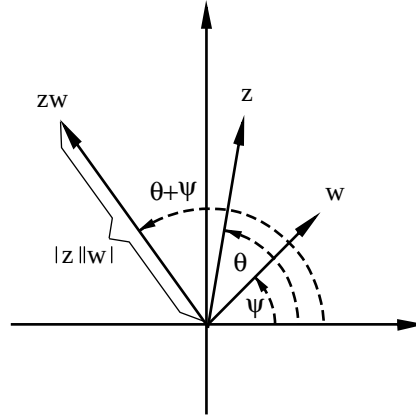
Ιδιαίτερα σημαντική για την μιγαδική ανάλυση είναι η συνάρτηση $\cos \theta + i \sin \theta$ και θα την συμβολίζουμε (προσωρινά όπως θα εξηγήσουμε) με $\text{cis}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Αν περιορίσουμε την συνάρτηση cis σε τυχαίο διάστημα $(a, a + 2\pi]$ ή $[a, a + 2\pi)$ ο περιορισμός της είναι ένα προς ένα και επί στον κύκλο κέντρου μηδέν και ακτίνας ένα ($(|z| = 1)$). Με την χρήση της συνάρτησης cis , κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός έχει την τριγωνομετρική έκφραση $z = |z| \text{cis}(\theta)$ για οποιοδήποτε $\theta \in \arg z$. Θα γράφουμε και εμείς κατά την συνήθεια

$$\text{cis}(\arg z) = z/|z| \text{ αντί } \text{cis}(\arg z) = \{z/|z|\}.$$

Αν $z = |z| \text{cis}(\theta)$, $w = |w| \text{cis}(\phi)$, τότε όπως είπαμε (με την εφαρμογή για τα ημίτονα και συνημίτονα των κανόνων αθροίσματος γωνιών) προκύπτει η σχέση

$$zw = |z| \text{cis}(\theta) |w| \text{cis}(\psi) = |z| |w| \text{cis}(\psi + \theta)$$



Σχήμα 1.2:

που φέρει τον ιστορικό τίτλο σαν τύπος του Demoivre.

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει άμεσα ο τύπος $z^n = |z|^n \text{cis}(n\theta)$ για κάθε ακέραιο αριθμό n .

Για $|z| = 1$ είναι προφανείς για την συνάρτηση cis οι σχέσεις,

$$\text{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \text{cis}(\theta_1)\text{cis}(\theta_2),$$

$$\text{cis}(-\theta) = 1/\text{cis}(\theta),$$

$$\text{cis}(n\theta) = \text{cis}^n(\theta)$$

για όλους τους ακέραιους n , και $\overline{\text{cis}(\theta)} = \text{cis}(-\theta)$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες είναι φανερό ότι η συνάρτηση $\text{cis}(\theta)$ συμπεριφέρεται σαν κάποια “μιγαδική δύναμη” με εκθέτη πολλαπλάσιο του θ προκαλώντας μας να την εκφράσουμε έτσι. Αν και θα προτιμήσουμε “έναν φυσιολογικό τοκετό” στην έννοια της μιγαδικής δύναμης, θα διευκολύνουμε και αυτούς που δεν συμφωνούν μαζί μας επιτρέποντας μια ματιά “στο υπερηχογράφημα του εμβρύου”. Η πραγματική δύναμη a^θ γράφεται $e^{c\theta}$ όπου $c = \log a$. Επομένως πρέπει να αναζητήσουμε c για να εκφράσουμε $e^{c\theta} = \text{cis}(\theta)$, παρακάμπτοντας την έννοια του λογαρίθμου επειδή μας είναι προς το παρόν άγνωστη στην γενική περίπτωση μιγαδικού αριθμού. Εδώ θα ρισκάρουμε μια παραδοχή

σχετικά με την κληρονομικότητα του εμβρύου, ότι δηλαδή κληρονομεί την ιδιότητα $(e^{c\theta})' = ce^{c\theta}$, τότε όμως

$$(e^{c\theta})' = (\cos \theta + i \sin \theta)' = i(\cos \theta + i \sin \theta) = ie^{i\theta},$$

που σημαίνει $c = i$ και η έκφραση που ταιριάζει είναι $cis\theta = e^{i\theta}$.

Χρήσιμες είναι οι περιγραφές κυκλικών δίσκων και περιφερειών σε πολικές συντεταγμένες με την χρήση της συνάρτησης cis .

Κλειστός κυκλικός δίσκος κέντρου z_0 ακτίνας b .

$$D[z_0, b] = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq b\} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + rcis(\theta), \theta \in (a, a+2\pi], 0 \leq r \leq b\}$$

Ανοικτός κυκλικός δίσκος κέντρου z_0 ακτίνας b .

$$D(z_0, b) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < b\} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + rcis(\theta), \theta \in (a, a+2\pi], 0 \leq r < b\}$$

Κύκλος κέντρου z_0 ακτίνας b .

$$C(z_0, b) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = b\} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + bcis(\theta), \theta \in (a, a + 2\pi)\}$$

Αν $z_1, z_2, \dots, z_n$ μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί από τον τύπο Demoivre προκύπτει $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ή γενικότερα

$$\arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n = \arg(z_1 z_2 \dots z_n)$$

Επειδή στην παραπάνω σχέση προσθέτουμε σύνολα και όχι αριθμούς, δηλαδή

$$A + B = \{z_1 + z_2 : z_1 \in A, z_2 \in B\}$$

η αντίστοιχη σχέση για τα κύρια ορίσματα δεν ισχύει πάντα διότι ενδεχομένως το άθροισμα να μην ανήκει στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Με άλλα λόγια

$$\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + \dots + \text{Arg} z_n = \text{Arg}(z_1 z_2 \dots z_n) \Leftrightarrow$$

$$-\pi < \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + \dots + \text{Arg} z_n \leq \pi$$

□

Εφαρμογή 1.3.2. Να λυθεί η εξίσωση $z^n = a$, όπου n φυσικός αριθμός. Για $a = 1$ έχουμε $|z^n| = |z|^n = 1$ ή $|z| = 1$, οπότε ο αριθμός z έχει την μορφή $z = \text{cis}(\theta)$. Η ισότητα $z^n = \text{cis}^n(\theta) = \text{cis}(n\theta) = 1$ ισχύει αποκλειστικά για τις τιμές

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0 \pm 1, \pm 2 \dots$$

Από την ευκλείδεια διαίρεση του k με το n έχουμε $k = nl + m$, $m = 0, 1, \dots, n-1$. Με την χρήση της παραπάνω σχέσης οι λύσεις της εξίσωσης γράφονται

$$\text{cis}(\theta_k) = \text{cis}(2l\pi + \frac{2m\pi}{n}) = \text{cis}(\frac{2m\pi}{n}) \text{ με } m = 0, 1, \dots, n-1$$

Με άλλα λόγια, επειδή $\text{cis}(\theta_k) = \text{cis}(\theta_{k+n})$ το σύνολο των λύσεων εξαντλείται σε οποιαδήποτε επιλογή n διαδοχικών από αυτές. Επιλέγοντας αυτές που αντιστοιχούν σε $k = 0, 1, \dots, n-1$ παρατηρούμε ότι είναι ανά δύο διαφορές μεταξύ τους. (βρείτε γιατί)

Στην γενική περίπτωση η εξίσωση $z^n = a$ γράφεται

$$Z^n = 1 \text{ όπου } Z = \frac{z}{|a|^{\frac{1}{n}}} \text{cis}(\frac{\text{Arg} a}{n})$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα παίρνουμε το σύνολο των n -στών ριζών του a από τον τύπο

$$\rho_k = \sqrt[n]{|a|} (\sin(\frac{\text{Arg} a + 2k\pi}{n}) + i \cos(\frac{\text{Arg} a + 2k\pi}{n})) = \sqrt[n]{|a|} \text{cis}(\frac{\text{Arg} a}{n}) \text{cis}^k(\frac{2\pi}{n})$$

για $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Από τις σχέσεις $|\rho_k| = \sqrt[n]{|a|}$ και

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| = \sqrt[n]{|a|} |\text{cis}^k(\frac{2\pi}{n}) - \text{cis}^{k-1}(\frac{2\pi}{n})| = \sqrt[n]{|a|} |\text{cis}(\frac{2\pi}{n}) - 1|$$

προκύπτει ότι οι διαδοχικές n -στές ρίζες του a αποτελούν κορυφές κανονικού n -γώνου πλευράς μήκους $\sqrt[n]{|a|} |\text{cis}(\frac{2\pi}{n}) - 1|$ και ακτίνας $\sqrt[n]{|a|}$

Σαν προσανατολισμένη γωνία δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών διαφόρων μεταξύ τους μπορούμε να θεωρούμε κάθε διατεταγμένο ζεύγος τους ή το

αντίστοιχο ζεύγος τον ημιευθειών με αρχή το μηδέν. Με όρισμα μιας προσανατολισμένης γωνίας (z_1, z_2) (από το z_1 στο z_2) ορίζουμε το σύνολο $\arg z_2 - \arg z_1 = \arg(z_2/z_1)$ και θα το συμβολίζουμε $\theta(z_1, z_2)$. Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε και το κύριο όρισμα $\text{Arg}(z_1, z_2) = \text{Arg}(z_2/z_1)$ και θα το συμβολίζουμε με $\Theta(z_1, z_2)$. Συχνά θα κάνουμε την “κεκτημένη παράβαση” να χρησιμοποιούμε την φράση η γωνία $\Theta(z_1, z_2)$ αντί για όρισμα. Αν έχουμε μία διατεταγμένη τριάδα (z_1, z, z_2) με $z_1 \neq z, z_2 \neq z$ τότε την ονομάζουμε και προσανατολισμένη γωνία με κορυφή z από το z_1 στο z_2 και ορίζουμε

$$\theta(z_1, z, z_2) = \arg(z_1, z, z_2) = \arg(z - z_2) - \arg(z - z_1) \text{ και}$$

$$\Theta(z_1, z, z_2) = \text{Arg}(z_1, z, z_2) = \text{Arg}\left(\frac{z - z_2}{z - z_1}\right).$$

$$\text{Προφανώς } \theta(z_1, z_2) = \theta(z_1, 0, z_2), \Theta(z_1, z_2) = \Theta(z_1, 0, z_2).$$

Εφαρμόζοντας την σχέση $\text{cis}(\arg z) = z/|z|$ παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\text{cis}(\theta(z_1, z, z_2)) = \frac{(z_2 - z)|z_1 - z|}{(z_1 - z)|z_2 - z|}$$

$$\cos(\theta(z_1, z, z_2)) = \frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|} \text{Re}\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$$

$$\sin(\theta(z_1, z, z_2)) = \frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|} \text{Im}\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$$

Νομίζω ότι πήραμε κάποια ιδέα για τον νέο δεσμό που αναπτύσσεται ανάμεσα στην άλγεβρα και την γεωμετρία με τη διαμεσολάβηση του σώματος των μιγαδικών αριθμών. Για να τον αναδείξουμε καλύτερα στα επόμενα παραδείγματα θα αποφύγουμε σκόπιμα να ανάγουμε τα θέματά μας σε μορφή προβλημάτων αναλυτικής γεωμετρίας.

Παράδειγμα 1.3.1. 1. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς a, b ισχύει η σχέση $a^2 + b^2 \pm ab = 0$ αποδείξτε ότι $|a| = |b| = |a \pm b|$.

2. Αν οι παραπάνω αριθμοί δεν είναι ίσοι ισχύει και το αντίστροφο.

3. Αν σε μια διακεκριμένη τριάδα, δηλαδή διαφόρων ανα δύο μιγαδικών αριθμών a, b, c , συναληθεύουν οι σχέσεις $|a| = |b| = |c|$ και $a + b + c = 0$ ή ισχύει η σχέση $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$ τότε τα παραπάνω σημεία αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Απόδειξη. Σχετικά με το πρώτο και δεύτερο ερώτημα. Συνδυάζοντας την γνωστή σχέση

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 + b^2 \mp ab)$$

με την υπόθεση παίρνουμε διαδοχικά

$$a^3 = \mp b^3, |a|^3 = |b|^3, |a| = |b|$$

Από το συνδυασμό της παραπάνω σχέσης με την $|a|^2 = |b||a+b|$ προκύπτει και ισότητα

$$|a+b| = |a| + |b|$$

Για το αντίστροφο θέτουμε

$$|a+b| = |a| = |b| = r \text{ οπότε } \bar{a} = \frac{r^2}{a}, \bar{b} = \frac{r^2}{b}.$$

Από την σχέση

$$r^2 = |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + \bar{b}a + \bar{a}b = 2r^2 + a\frac{r^2}{b} + b\frac{r^2}{a}$$

προκύπτει το ζητούμενο.

Από την σχέση $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 = 4r^2$ παίρνουμε $|a-b| = \sqrt{3}r$. Ομοίως προκύπτουν αντίστοιχες ισότητες για τα $|c-b|$ και $|a-c|$.

Στο τρίτο ερώτημα, ένας εξοικειωμένος με αλγεβρικές ταυτότητες διακρίνει ότι $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-b)(b-c)$, οπότε ανάγεται στα προηγούμενα. $\square$

Παράδειγμα 1.3.2. Να τεθούν σε καρτεσιανή μορφή $x + iy$ οι μιγαδικοί αριθμοί

$$(1+i)^{953} \text{ και } (\sqrt{2} + \sqrt{2}i + i\sqrt{2} - \sqrt{2})^{129}.$$

Παρατηρούμε ότι $(1+i)^2 = -2i$, οπότε $(1+i)^{953} = ((1+i)^4)^{233}(1+i) = -2^{466}(1+i)$.

Ο δεύτερος τρόπος (και πιο σίγουρος συνήθως) είναι με την χρήση της τριγωνομετρικής έκφρασης που θα τον εφαρμόσουμε στο επόμενο ερώτημα.

Αν $z = (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})$ τότε $|z| = 2$ και οι εξισώσεις

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \sin \theta = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

συναληθεύουν για $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο του De Moivre παίρνουμε

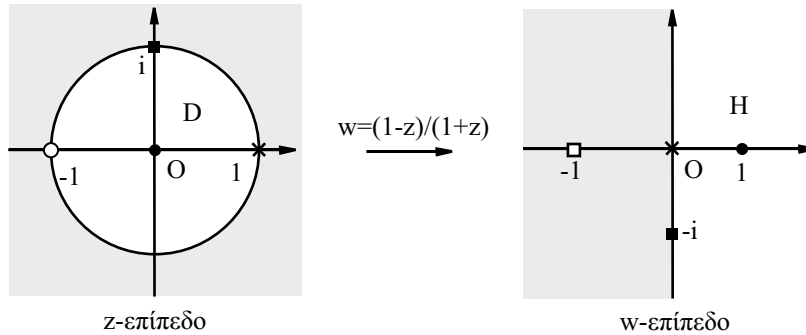
$$z^{129} = |z|^{129} \operatorname{cis}\left(129 \frac{\pi}{8}\right) =$$

$$2^{129} \operatorname{cis}\left(32\pi + \frac{\pi}{8}\right) = 2^{129} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2^{129}(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}).$$

Παράδειγμα 1.3.3. Αν $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$, $g(z) = \frac{a+z}{1+\bar{a}z}$, $|a| < 1$, αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες στα σύνολα που οι τύποι τους έχουν νόημα. Στη συνέχεια βρείτε τα σύνολα

$$f\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, f\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}, f\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq 1\}$$

$$g\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, g\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, g\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, z \neq 1/\bar{a}\}.$$



Σχήμα 1.3:

Η εξίσωση $\frac{1-z}{1-\bar{z}} = w$ δίνει μοναδική λύση $z = \frac{w-1}{1+w}$. Επίσης ισχύει

$$|z| < 1 \Leftrightarrow |1 - w|^2 < |1 + w|^2 \Leftrightarrow \\ 1 + |w|^2 - 2\operatorname{Re} w < 1 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} w \Leftrightarrow \operatorname{Re} w > 0,$$

επομένως το σύνολο $f\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ταυτίζεται με το δεξιό ημιεπίπεδο $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$f\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0\}$$

και

$$f\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq -1\} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0\}$$

(Η συνάρτηση f μπορεί να παρομοιαστεί με εκρηκτικό μηχανισμό εγκατεστημένο στο σημείο 1 που εκτινάσσει με μία άπειρη διαστολή τον τρύπιο μοναδιαίο κύκλο στο ένα καλύπτοντας όλο τον φανταστικό άξονα, με το εσωτερικό του κύκλου καλύπτει όλο το δεξιό ημιεπίπεδο και με το εξωτερικό του καλύπτει το αριστερό ημιεπίπεδο.)

Επιλύοντας την εξίσωση $g(z) = w$ παίρνουμε $z = \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$. Επίσης ισχύει

$$|z| < 1 \Leftrightarrow |w - a|^2 < |1 - \bar{a}w|^2 \Leftrightarrow \\ |w|^2 + |a|^2 + 2\operatorname{Re} \bar{a}w < 1 + |a|^2|w|^2 + 2\operatorname{Re} \bar{a}w \Leftrightarrow \\ (1 - |a|^2)(1 - |w|^2) < 0 \Leftrightarrow |w| < 1$$

οπότε

$$g\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$g\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

και

$$g\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, z \neq -1/\bar{a}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, z \neq 1/\bar{a}\}$$

(Η συνάρτηση g “ανακατεύει μεταξύ τους” τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου, το ίδιο και τα σημεία του εσωτερικού δίσκου. Ανακατεύει επίσης και το τρύπιο εξωτερικό του κύκλου στο $-1/\bar{a}$ μεταφέροντας την τρύπα στο $1/\bar{a}$).

1.3.2 Μιγαδική παράσταση της ευθείας.

Καταρχήν η γνωστή μας εξίσωση $a_1x + a_2y + d = 0$ για $z_0 = a_1 - ia_2$ και $z_1 = iz_0$ μπορεί να γραφτεί στις ισοδύναμες μορφές

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_0z) + d &= 0, \quad z_0z + \bar{z}_0\bar{z} + 2d = 0, \quad d \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Im}(z_1z) + d &= 0, \quad z_1z - \bar{z}_1\bar{z} + 2id = 0, \quad d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σε αντιστοιχία με την διανυσματική παράσταση η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία a, b του επιπέδου παρίσταται από το σύνολο

$$E(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : z = a + t(b - a), t \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \frac{z - a}{b - a} = 0\}$$

Από την παραπάνω περιγραφή με την αξιοποίηση στοιχειωδών μιγαδικών σχέσεων παίρνουμε την ισοδύναμη εξίσωση

$$z(\bar{b} - \bar{a}) - \bar{z}(b - a) = a\bar{b} - \bar{a}b$$

Εφαρμογή 1.3.3. Να διατυπωθούν σε μιγαδική μορφή οι εξισώσεις των διαμέσων τριγώνου με κορυφές a, b, c και να επαληθευτεί ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο στη συνέχεια να υπολογιστεί.

Η εξίσωση της διαμέσου με κορυφή το a επειδή διέρχεται από το σημείο $\frac{b+c}{2}$ είναι

$$z \frac{(\bar{b} + \bar{c})}{2} - \bar{z} \frac{(b + c)}{2} = a \frac{(\bar{b} + \bar{c})}{2} - \bar{a} \frac{(b + c)}{2}$$

Ομοίως η εξίσωση της διαμέσου με κορυφή το b είναι

$$z \frac{(\bar{a} + \bar{c})}{2} - \bar{z} \frac{(a + c)}{2} = b \frac{(\bar{a} + \bar{c})}{2} - \bar{b} \frac{(a + c)}{2}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η εξίσωση της τρίτης διαμέσου, που σημαίνει ότι και οι τρεις διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επιλύοντας το πρωτοβάθμιο σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς z και $\bar{z}$ βρίσκουμε το βαρύκεντρο $z = \frac{a + b + c}{3}$.

Ορίζουμε δύο μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς σαν κάθετους μεταξύ τους όταν τα αντίστοιχα διανύσματα είναι κάθετα, γεγονός που εκφράζεται από την σχέση

$$|\Theta(z_1, z_2)| = |\operatorname{Arg}(z_1/z_2)| = \pi/2$$

ή ισοδύναμα

$$\operatorname{Re}(z_1/z_2) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από σημείο c και είναι κάθετη στην ευθεία $E(a, b)$ δίδεται από την εξίσωση

$$\operatorname{Re}[(z - c)(\bar{b} - \bar{a})] = 0$$

ή ισοδύναμα

$$z(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{z}(b - a) = c(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{c}(b - a)$$

Εφαρμογή 1.3.4. Να ευρεθούν οι εξισώσεις των υψών, και μεσοκαθέτων τριγώνου με κορυφές a, b, c και να επαληθευτούν τα γνωστά θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας ότι κάθε τριάδα διέρχεται από το ίδιο σημείο.

Τα ύψη με κορυφές τα c, b περιγράφονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις

$$\begin{aligned} z(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{z}(b - a) &= c(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{c}(b - a), \\ z(\bar{c} - \bar{a}) + \bar{z}(c - a) &= b(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{b}(c - a). \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει η εξίσωση του τρίτου ύψους που σημαίνει ότι και τα τρία διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Για την εύρεση του σημείου τομής μπορείτε να επιλύσετε το παραπάνω σύστημα.

Με βάση όσα είπαμε η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία b, c είναι

$$z(\bar{b} - \bar{c}) + \bar{z}(b - c) = \frac{(b + c)(\bar{b} - \bar{c})}{2} + \frac{(\bar{b} + \bar{c})(b - c)}{2}.$$

και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

Εφαρμογή 1.3.5. (Υπολογισμός εμβαδού τριγώνου).

Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία a, b, c με βάση το θεώρημα της ευκλείδειας γεωμετρίας που το δίδει σαν το γινόμενο των μηκών δύο πλευρών και του ημίτονου της περιεχόμενης γωνίας.

Με βάση το παραπάνω το εμβαδό είναι ίσο με

$$|b - a||c - a|\sin \Theta(b, a, c)$$

Ενθυμούμενοι ή ακόμη καλύτερα αναπαράγοντας την σχέση

$$\sin \Theta(a, b, c) = \operatorname{Im}\left[\frac{c - a}{b - a}\right] \frac{|b - a|}{|c - a|}$$

και αντικαθιστώντας την βρίσκουμε για το εμβαδό την τιμή

$$|\operatorname{Im}[(c - a)(\bar{b} - \bar{a})]|$$

1.3.3 Μιγαδική παράσταση κύκλου.

Το σύνολο των σημείων z του κύκλου κέντρου K και ακτίνας $R > 0$ περιγράφεται ισοδύναμα από τις παρακάτω σχέσεις

$$z = K + R \operatorname{cis}(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad |z - K| = R,$$

$$|z|^2 - \bar{K}z - K\bar{z} + K^2 - R^2 = 0$$

Παρατηρώντας προσεκτικά την την τελευταία ισότητα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε κύκλος περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z} + b = 0 \text{ με } b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C} : |a|^2 - b > 0$$

και αντιστρόφως.

Το κέντρο του δίδεται από την τιμή $-\bar{a}$ και η ακτίνα από την τιμή $\sqrt{|a|^2 - b}$.

Εφαρμογή 1.3.6. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ο λόγος των αποστάσεών τους από δύο συγκεκριμένα σημεία a, b είναι ίσος με σταθερά $k > 0$.

Η υπόθεση $|z - a|^2 = k^2|z - b|^2$ μετά την εκτέλεση των πράξεων μετατρέπεται στην ισοδύναμη

$$|z|^2(1 - k^2) + z(-\bar{a} + k^2\bar{b}) + \bar{z}(-a + k^2b) + |a|^2 - k^2b^2 = 0$$

Για $k = 1$ η εξίσωση γίνεται

$$z(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{z}(b - a) + |a|^2 - |b|^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\operatorname{Re}\left[\left(z - \frac{a+b}{2}\right)(\bar{b} - \bar{a})\right] = 0$$

που περιγράφει (όπως αναμέναμε) την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα a, b .

Για $k \neq 1$ διαιρούμε με $1 - k^2$ και εξετάζουμε με βάση τα προηγούμενα την προϋπόθεση η εξίσωση να παριστάνει κύκλο με κέντρο τον αριθμό $\frac{\bar{a} - k^2\bar{b}}{1 - k^2}$, δηλαδή αν ισχύει

$$\frac{|k^2b - a|^2}{(1 - k^2)^2} - \frac{|a|^2 - b^2}{1 - k^2} > 0.$$

Πράγματι ισχύει και μάλιστα κάνοντας προσεκτικά τις πράξεις η παραπάνω παράσταση παίρνει την κομψή μορφή $\frac{k^2|a - b|^2}{(1 - k^2)^2}$ που σημαίνει ότι έχουμε κύκλο με κέντρο $\frac{\bar{a} - k^2\bar{b}}{1 - k^2}$ και με ακτίνα $\frac{k|b - a|}{|1 - k^2|}$.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία τοπολογίας του επιπέδου

2.1 Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Για τους στόχους αυτού του εγχειρήματος είναι επαρκείς οι γνώσεις της μετρικής του επιπέδου ή γενικότερα του χώρου $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδεια απόσταση όπως διδάσκονται στα μαθήματα πραγματικής ανάλυσης και από αυτή την άποψη μπορούσαν να θεωρηθούν γνωστά. Επίσης τα ζητήματα αυτά από γενικότερη σκοπιά έχουν αντιμετωπιστεί στην τοπολογία των μετρικών χώρων. Παρόλα αυτά στο εδάφιο αυτό θα κάνουμε μια συνεκτική παρουσίαση του ελάχιστου υλικού που θα χρειαστούμε με τις αναγκαίες προσαρμογές στο μιγαδικό επίπεδο.

Αν X μη κενό σύνολο και d συνάρτηση ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ με πραγματικές τιμές, τότε λέμε ότι d αποτελεί μετρική ή απόσταση στο σύνολο X αν για κάθε $x, y, w \in X$ ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες.

- $d(x, y) \geq 0$ με ισότητα εάν και μόνο εάν $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ (συμμετρία)
- $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y)$ (τριγωνική ιδιότητα)

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις το ζεύγος (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Αν $A \subseteq X$ και θεωρήσουμε τον περιορισμό d_A της μετρικής d στο $A \times A$ τότε ο μετρικός χώρος (A, d_A) ονομάζεται υπόχωρος του (X, d) . (Για πρακτικούς λόγους τον μετρικό χώρο κάποιες φορές δεν τον συμβολίζουμε με το ζεύγος

αλλά μόνο με το σύνολο αφού πρώτα προηγηθεί ο προσδιορισμός μετρικός χώρος υπονοώντας την μετρική που του έχουμε προηγουμένως ορίσει.

Στην περίπτωση του μιγαδικού επιπέδου και γενικότερα του $\mathbb{R}^n$ η συνήθης μετρική που χρησιμοποιούμε είναι η ευκλείδεια απόσταση δηλαδή αν $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ τότε

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Η απόδειξη ότι αποτελεί μετρική προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών που έχουμε αναφέρει.

Αν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων ενός μετρικού χώρου X θα λέμε ότι συγχλίνει στο $x \in X$ ή έχει όριο το x και συμβολίζουμε με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Στην παραπάνω περίπτωση όταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεων συμβολίζουμε και πιο απλά $x_n \rightarrow x$ ή $\lim x_n = x$. Το όριο όταν υπάρχει είναι μοναδικό.

Στην περίπτωση του μιγαδικού επιπέδου αν z_n μιγαδική ακολουθία τότε

$$z_n \rightarrow z = x + iy \leftrightarrow |z_n - z| \rightarrow 0 \leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ και } y_n \rightarrow y$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις γνωστές μας ανισότητες

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

Η άλγεβρα των πραγματικών ακολουθιών και των αντίστοιχων ορίων τους (άθροισμα, διαφορά, γινόμενο, πηλίκο) επεκτείνεται στο μιγαδικό επίπεδο, Για την απόδειξη των αντίστοιχων προτάσεων είτε ακολουθούμε πιστά την διαδικασία της αντίστοιχης πραγματικής περίπτωσης, είτε θεωρούμε την μιγαδική ακολουθία σαν ζεύγος πραγματικών ακολουθιών .Π.χ.

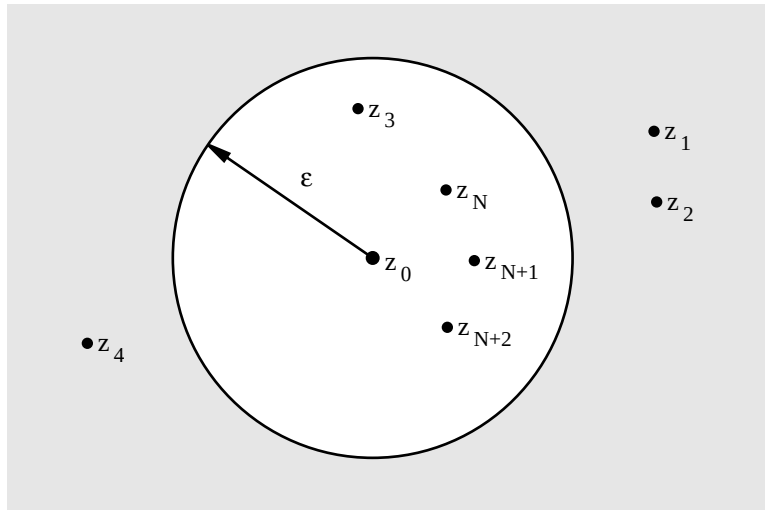
Αν $z_n = x_n + iy_n \rightarrow z = x + iy$ και $z_n^* = x_n^* + iy_n^* \rightarrow x^* + iy^*$ τότε $z_n z_n^* = x_n x_n^* - y_n y_n^* + i(x_n y_n^* + x_n^* y_n) \rightarrow x x^* - y y^* + i(x y^* + x^* y) = z z^*$

Με ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας $r > 0$ ονομάζουμε το σύνολο

$$S(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$$

και με κλειστή κέντρου x και ακτίνας $r > 0$ ονομάζουμε το σύνολο

$$S[x, r] = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}$$



Σχήμα 2.1:

Θα λέμε ότι ένα σύνολο A είναι ανοικτό σύνολο στον μετρικό χώρο αν είναι το κενό ή αν αποτελεί ένωση ανοικτών σφαιρών του δηλαδή για κάθε $x \in A$ υπάρχει ανοικτή σφαίρα $S(x, r) \subseteq A$.

Σχετικά με τα ανοικτά σύνολα ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

- Θεώρημα 2.1.1.**
1. Κάθε ανοικτή σφαίρα είναι ανοικτό σύνολο.
 2. Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.
 3. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

Ένα σύνολο ονομάζεται κλειστό στο χώρο X αν το συμπληρωμά του είναι ανοικτό.

λΣχετικά με τα κλειστά σύνολα ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

- Θεώρημα 2.1.2.**
1. Κάθε κλειστή σφαίρα είναι κλειστό σύνολο.

2. Η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
3. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Παρατήρηση 2.1.1. Όταν χαρακτηρίζουμε ένα σύνολο ανοικτό ή κλειστό πρέπει στη συνέχεια να προσδιορίζουμε ως προς ποιο χώρο το εννοούμε διότι μπορεί να είναι ανοικτό ή κλειστό ως προς έναν υπόχωρο και να μην είναι ως προς τον αρχικό. Όταν δεν το κάνουμε εννοούμε τον αρχικό χώρο. Αν π.χ θεωρήσουμε σαν υπόχωρο της πραγματικής ευθείας ένα κλειστό διάστημα τότε είναι ανοικτό σύνολο ως προς τον εαυτό του αλλά δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του αρχικού χώρου. Αν πάρουμε ανοικτό διάστημα τότε είναι κλειστό στον εαυτό του αλλά όχι στον αρχικό.

Ορισμός 2.1.1. Ένα σημείο ονομάζεται εσωτερικό σημείο ενός συνόλου $A \subseteq X$ αν υπάρχει $S(x, r) \subseteq A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A ονομάζεται εσωτερικό ή πυρήνας του A και συμβολίζεται με A° .

Ο πυρήνας ενός συνόλου ταυτίζεται με την ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του και επομένως είναι το μεγαλύτερο από αυτά.

Ορισμός 2.1.2. Ένα σημείο x ονομάζεται σημείο σεισωρεύσεως ενός συνόλου A αν κάθε σφαίρα $S(x, r)$ περιέχει άπειρα στοιχεία του A .

Τα σημεία σεισωρεύσεως ενός συνόλου A δεν ανήκουν υποχρεωτικά σε αυτό και το σύνολό τους συμβολίζεται με A' .

Θεώρημα 2.1.3. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Το σημείο x είναι σημείο σεισωρεύσεως ενός συνόλου A .
2. Κάθε σφαίρα $S(x, r)$ περιέχει στοιχείο του A διάφορο του x , δηλαδή $(S(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
3. Υπάρχει απειρότιμη (έχει άπειρο πλήθος τιμών) ακολουθία σημείων του A που συγκλίνει στο x .

Ορισμός 2.1.3. Ένα σημείο x του συνόλου A ονομάζεται μεμονωμένο ή απομονωμένο σημείο του αν υπάρχει σφαίρα $S(x, r)$ που το μοναδικό στοιχείο του A που περιέχει είναι το x δηλαδή $S(x, r) \cap A = \{x\}$.

Είναι φανερό ότι ένα σημείο είναι μεμονωμένο σε ένα σύνολο εάν και μόνο εάν ανήκει σε αυτό και δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του.

Ορισμός 2.1.4. Περίβλημα ή κλειστότητα ενός συνόλου ονομάζεται το σύνολο $\overline{A} = A \cup A'$.

Το περίβλημα ενός συνόλου ταυτίζεται με την τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του και επομένως είναι το μικρότερο από αυτά.

Για τον χαρακτηρισμό ενός συνόλου ως κλειστού ισχύουν τα παρακάτω.

Θεώρημα 2.1.4. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. το σύνολο είναι κλειστό
2. $A' \subseteq A$
3. $A = \overline{A}$
4. Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας στοιχείων του περιέχεται στο σύνολο.

Με σύνορο ενός συνόλου A ονομάζεται το $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ που εύκολα αποδείχνεται ότι είναι ίσο με $\overline{A} - A^\circ$.

Ενα σύνολο A ονομάζεται πυκνό στο χώρο X εάν $\overline{A} = X$.

Απόσταση δύο συνόλων A, B ονομάζεται η ποσότητα $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ και διάμετρος ενός συνόλου A η ποσότητα $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

2.2 Πληρότητα

Ορισμός 2.2.1. Μια ακολουθία x_n ενός μετρικού χώρου ονομάζεται βασική ή Cauchy εάν

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) = 0,$$

δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $n_0(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε $d(x_n, y_m) < \varepsilon$ όταν $n, m > n_0(\varepsilon)$.

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy. Η απόδειξη προκύπτει από το συνδυασμό του ορισμού με την τριγωνική ιδιότητα $d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$.

Ορισμός 2.2.2. Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται πλήρης εαν κάθε ακολουθία του που είναι Cauchy συγκλίνει.

Πρόταση 2.2.1. Κάθε μετρικός χώρος $\mathbb{R}^n$ (με την ευκλείδια απόσταση) είναι πλήρης.

Πρόταση 2.2.2. Ένας υπόχωρος ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης εάν και μόνο εάν είναι κλειστός.

Θεώρημα 2.2.1. Αν X πλήρης μετρικός χώρος και $F_1 \supseteq F_2 \dots \supseteq F_n \dots$, φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του με $d(F_n) \rightarrow 0$ τότε η τομή όλων των κλειστών συνόλων $\cap F_n$ είναι μονοσύνολο.

2.3 Συμπάγεια

Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X . Μια οικογένεια $O_i, i \in I$ από ανοικτά υποσύνολά του ονομάζεται ανοικτή κάλυψη του X αν $X = \bigcup_{i \in I} O_i$.

Ορισμός 2.3.1. Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται συμπαγής όταν κάθε ανοικτή του κάλυψη $O_i, i \in I$ περιέχει πεπερασμένη υποκάλυψη δηλαδή υπάρχει επιλογή $O_{i_k}, k = 1, 2, \dots, n$ από ανοικτά της αρχικής κάλυψης ώστε $Q = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

Ένα υποσύνολο του αρχικού χώρου ονομάζεται συμπαγές αν ο αντίστοιχος μετρικός υπόχωρος είναι συμπαγής. Μια ισοδύναμη με τον ορισμό πρόταση με την χρήση των ανοικτών συνόλων του αρχικού χώρου είναι η εξής.

Πρόταση 2.3.1. Ένα υποσύνολο K του μετρικού χώρου είναι συμπαγές εάν και μόνο εάν κάθε ανοικτή υπερκάλυψή του από οικογένεια ανοικτών του αρχικού χώρου δηλαδή $K \subseteq \bigcup O_i$ περιέχει πεπερασμένη υπερκάλυψη δηλαδή επιλογή $O_{i_k}, k = 1, 2, \dots, n$ ώστε $K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

Σχετικά με το επίπεδο και γενικότερα για κάθε χώρο $\mathbb{R}^n$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα αναγνώρισης συμπαγών συνόλων.

Θεώρημα 2.3.1. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου είναι συμπαγές.
2. Είναι κλειστό και φραγμένο.
3. Κάθε ακολουθία στοιχείων του έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που το όριό της ανήκει στο σύνολο.

Πρόταση 2.3.2. Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς μετρικού χώρου είναι συμπαγές.

Πρόταση 2.3.3. Αν $K \subseteq X_1 \subseteq X$ τότε το K είναι συμπαγές ως προς τον χώρο X εάν και μόνο εάν είναι συμπαγές ως προς τον υπόχωρο X_1 .

Πρόταση 2.3.4. Αν K συμπαγές και $F \subseteq K$ κλειστό τότε και το F είναι συμπαγές.

Θεώρημα 2.3.2. Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.

2.4 Συνεκτικότητα

Ορισμός 2.4.1. Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος X είναι μη συνεκτικός εάν είναι δυνατό να διαμελιστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους ανοικτά μη κενά υποσύνολά του, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά σύνολα στο χώρο

$$O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset \text{ με } O_1 \cup O_2 = X \text{ και } O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Επειδή τα παραπάνω ανοικτά σύνολα είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους, ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.4.1. 1. Ένας μετρικός χώρος είναι μη συνεκτικός

2. Είναι δυνατός ο διαμελισμός του σε δύο κλειστά μη κενά υποσύνολά του
3. Υπάρχει γνήσιο μη κενό υποσύνολό του που είναι ανοικτό και κλειστό ταυτόχρονα.

Τώρα είναι πιο ευκολότερη η κατανόηση του συνεκτικού χώρου που προφανώς τον εννοούμε σαν άρνηση του μη συνεκτικού και ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.4.2. Ένας μετρικός χώρος είναι συνεκτικός.

1. Τα μοναδικά υποσύνολά του που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά είναι ολόκληρος ο χώρος και το κενό σύνολο.
2. Αν η ένωση δύο ανοικτών συνόλων ταυτίζεται με τον χώρο τότε ή το ένα από τα δύο είναι κενό ή η τομή τους δεν είναι το κενό σύνολο.

Ένα υποσύνολο μετρικού χώρου ονομάζεται συνεκτικό εάν ο αντίστοιχος υπόχωρος είναι συνεκτικός.

Ο έλεγχος της συνεκτικότητας ενός υποχώρου γίνεται πολλές φορές ευκολότερα με την χρήση ανοικτών συνόλων του αρχικού χώρου με τις παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 2.4.3. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X δεν είναι συνεκτικό αν είναι δυνατό να διαμελιστεί σε δύο μέ κενά υποσύνολά του A_1 και $A - A_1$ από δύο ανοικτά σύνολα O_1 και O_2 του αρχικού χώρου, δηλαδή $A_1 = A \cap O_1$ και $A - A_1 = A \cap O_2$.

Πρόταση 2.4.4. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι συνεκτικό αν δεν είναι δυνατό να διαμελιστεί σε δύο μη κενά υποσύνολά του από δύο ανοικτά μη κενά υποσύνολα O_1, O_2 του αρχικού χώρου δηλαδή αν $A \subseteq O_1 \cup O_2$ τότε ή $O_1 \cap O_2 \cap A \neq \emptyset$ ή $A \subseteq O_1$ ή $A \subseteq O_2$.

Πρόταση 2.4.5. Αν ένα σύνολο είναι συνεκτικό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας τότε είναι είτε μονοσύνολο είτε διάστημα.

Πρόταση 2.4.6. Αν X μετρικός χώρος και $A \subseteq A_1 \subseteq X$ τότε το A είναι συνεκτικό ως προς X εάν και μόνο εάν το είναι συνεκτικό ως προς A_1 .

Θεώρημα 2.4.1. Αν η τομή μιας οικογένειας συνεκτικών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου δεν είναι κενό σύνολο τότε η ένωση των μελών της είναι συνεκτικό σύνολο.

Αν πάρουμε ένα στοιχείο x ενός μετρικού χώρου είναι προφανές ότι το αντίστοιχο μονοσύνολο είναι συνεκτικό. Αν με C_x συμβολίσουμε το σύνολο που προκύπτει από την ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων που περιέχουν x από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι είναι συνεκτικό και μάλιστα το μεγαλύτερο δυνατό της παραπάνω οικογένειας. Το παραπάνω σύνολο ονομάζεται συνεκτική συνιστώσα στο x . Αν πάρουμε ένα ζεύγος συνιστωσών με βάση πάλι το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι είτε ταυτίζονται είτε είναι ξένες μεταξύ τους. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι κάθε μη συνεκτικός μετρικός χώρος διαμελίζεται με μοναδικό τρόπο σε πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος συνεκτικών υποχώρων του που ονομάζονται συνεκτικές συνιστώσες του.

Αν ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι ταυτόχρονα ανοικτό και συνεκτικό ονομάζεται τόπος ή χωρίο. Οι τόποι του μιγαδικού επιπέδου παίζουν σπουδαίο ρόλο στη μιγαδική ανάλυση. Για να δώσουμε έμφαση την διπλή τους ιδιότητα ως ανοικτού και συνεκτικού συνόλου θα συμβολίζουμε τους τόπους με OC . Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου είναι ανοικτά σύνολα το πολύ αριθμήσιμου πλήθους, δηλαδή κάθε ανοικτό μη συνεκτικό σύνολο διαμελίζεται με μοναδικό τρόπο σε επιμέρους τόπους το πολύ αριθμήσιμου πλήθους.

Ενα υποσύνολο του A μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται πολυγωνικά συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων του υπάρχει πολυγωνική γραμμή που τα ενώνει και περιέχεται ολόκληρη στο A .

Στην περίπτωση που μπορούμε κάθε ζεύγος να το ενώσουμε με κλιμακωτή πολυγωνική γραμμή (διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα οριζόντια και κατακόρυφα) το σύνολο θα λέγεται κλιμακωτά συνεκτικό.

Τα πιο απλά πολυγωνικά συνεκτικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου είναι τα κυρτά, δηλαδή αυτά που για κάθε ζεύγος σημείων που περιέχουν, περιέχουν και το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει,

δηλαδή αν $z_1, z_2 \in A$ τότε $tz_1 + (1 - t)z_2 \in A$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Σχετικά με την συνεκτικότητα ανοικτών συνόλων ισχύει το παρακάτω χρήσιμο θεώρημα χαρακτηρισμού τους.

Θεώρημα 2.4.2. Αν O ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Το O είναι τόπος
2. Είναι πολυγωνικά συνεκτικό

3. Είναι κλιμακωτά συνεκτικό

Απόδειξη. $(2, 3) \rightarrow 1$. Καταρχήν κάθε ανοικτός δίσκος έχει και τις τρεις παραπάνω ιδιότητες. Θα θεωρήσουμε γνωστό ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι συνεκτικό σύνολο. (Ο αναγνώστης μπορεί να το αποδείξει χρησιμοποιώντας την σχετική πρόταση για πραγματικούς αριθμούς άλλως μπορεί να περιμένει την επόμενη παράγραφο)

Κάθε πολυγωνική γραμμή από δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα επειδή απαρτίζεται από δύο συνεκτικά σύνολα με μη κενή τομή είναι συνεκτικό σύνολο. Επαγωγικά αποδείχεται τώρα ότι κάθε πολυγωνική γραμμή είναι συνεκτικό σύνολο. Αν πάρουμε όλες τις κλιμακωτές πολυγωνικές γραμμές του O που ξεκινούν από ένα σημείο a και επομένως έχουν μη κενή τομή με βάση το θεώρημα της ένωσης συνεκτικών η ένωσή τους είναι συνεκτικό σύνολο. Επειδή όμως το σύνολο είναι πολυγωνικά συνεκτικό η ένωσή τους ταυτίζεται με το σύνολο O .

$1 \rightarrow (2, 3)$. Θεωρούμε ένα σημείο $a \in O$. Αν θεωρήσουμε τυχόν $z \in O_1$ όπου O_1 το σύνολο των σημείων με την ιδιότητα να υπάρχει κλιμακωτή πολυγωνική γραμμή του O που να τα συνδέει με το a και θεωρήσουμε δίσκο $D(z, r) \subseteq O$ τότε κάθε σημείο του δίσκου έχει την παραπάνω ιδιότητα διότι μπορεί να συνδεθεί κλιμακωτά με το κέντρο z και στη συνέχεια με το a . Από το προηγούμενο προκύπτει ότι τυχόν σημείο του O_1 είναι κέντρο δίσκου που περιέχεται ολόκληρος σε αυτό, δηλαδή όλα του τα σημεία είναι εσωτερικά ή ισοδύναμα το O_1 είναι ανοικτό σύνολο.

Αν πάρουμε τώρα τυχόν σημείο $z \in O - O_1$ και θεωρήσουμε δίσκο $D(z, r_1) \subseteq O$ παρατηρούμε ότι κανένα στοιχείο του δίσκου δεν μπορεί να συνδεθεί με το a σύμφωνα με τις απαιτήσεις μας διότι θα στην αντίθετη περίπτωση θα διαμεσολαβούσε για την κλιμακωτή σύνδεση του z με το a , δηλαδή ολόκληρος ο περιέχεται στο σύνολο $O - O_1$ και επομένως το σύνολο αυτό είναι ανοικτό. Πράγματι Αν υπήρχε σημείο του δίσκου που μπορούσε να συνδεθεί πολυγωνικά με το a τότε θα συνεχίζαμε την γραμμή μέχρι το κέντρο κάτι που δεν μπορεί να συμβεί επειδή το κέντρο z δεν ανήκει στο O_1 .

Επειδή το αρχικό σύνολο σαν τόπος δεν διαμελίζεται σε δύο ξένα ανοικτά μη κενά σημαίνει ότι ένα από τα σύνολα $O_1, O - O_1$ είναι το O και το άλλο το κενό προφανώς $O_1 = O$ που σημαίνει ότι το σύνολο είναι κλιμακωτά συνεκτικό. $\square$

2.5 Όριο-συνέχεια

Αν f μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A , z_0 σημείο συσσωρεύσεως του A και $a \in \mathbb{C}$, λέμε ότι:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $|f(z) - a| < \varepsilon$ για κάθε $z \in A - \{z_0\}$ με $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$.

Θεώρημα 2.5.1. Αν f μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A , z_0 σημείο συσσωρεύσεως του A οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$
2. Για κάθε $D(a, \varepsilon)$ υπάρχει $D(z_0, \delta)$ ώστε, $f(D(z_0, \delta)) \subseteq D(a, \varepsilon)$, και σε ακολουθιακή γλώσσα,
3. Για κάθε ακολουθία $z_n \in A - \{z_0\}$ με $z_n \rightarrow z_0$ ισχύει $f(z_n) \rightarrow a$.

Παρατηρούμε ότι είτε ανήκει είτε δεν ανήκει το z_0 στο σύνολο A για τον ορισμό του ορίου εργαζόμαστε σαν να μην ανήκει, δηλαδή εργαζόμαστε στο σύνολο $A - \{z_0\}$.

Χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των ορίων των ακολουθιών μπορούμε να έχουμε την αντίστοιχη άλγεβρα για τα όρια συναρτήσεων και την πρόταση ότι το όριο μιας μιγαδικής συνάρτησης υπάρχει σε ένα σημείο αν και μόνο εάν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων πραγματικό και φανταστικό μέρος.

Από την πραγματική ανάλυση γνωρίζουμε την πρόταση ότι αν το όριο σε ένα σημείο είναι διάφορο του μηδενός τότε “κοντά στο σημείο” η συνάρτηση γίνεται ομόσημη του ορίου. Η αντίστοιχη πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μιγαδική ανάλυση προσέχοντας βέβαια να μην χρησιμοποιήσουμε την φράση ομόσημη του ορίου αλλά την διάφορη του μηδενός.

Παρατήρηση 2.5.1. Αν f μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A , z_0 σημείο συσσωρεύσεως του A και $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|a|/2 < |f(z)| < 3|a|/2$ όταν $z \in D(z_0, \delta) \cap A$.

Για την απόδειξη όπως στην πραγματική περίπτωση εφαρμόζουμε τον ορισμό για $\varepsilon = |a|/2$.

Ορισμός 2.5.1. Αν f μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A , $z_0 \in A$ θα λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής στο z_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$.

Επειδή στη βιβλιογραφία ενδεχομένως να δείτε τον ορισμό ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν υπάρχει το όριο και είναι ίσο με την τιμή της αυτό με βάση τον ορισμό που δώσαμε δεν είναι ακριβές διότι στη συνέχεια έχουμε συμπεριλάβει και την περίπτωση που το σημείο z_0 δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως.

Το ακριβές είναι το εξής. Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της τότε η συνάρτηση είναι συνεχής σε αυτό (εξηγείστε το μόνοι σας με βάση τον ορισμό της συνέχειας). Αν το z_0 εκτός από το γεγονός ότι ανήκει στο πεδίο ορισμού είναι και σημείο συσσωρεύσεως σε αυτό τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο z_0 εάν και μόνο εάν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

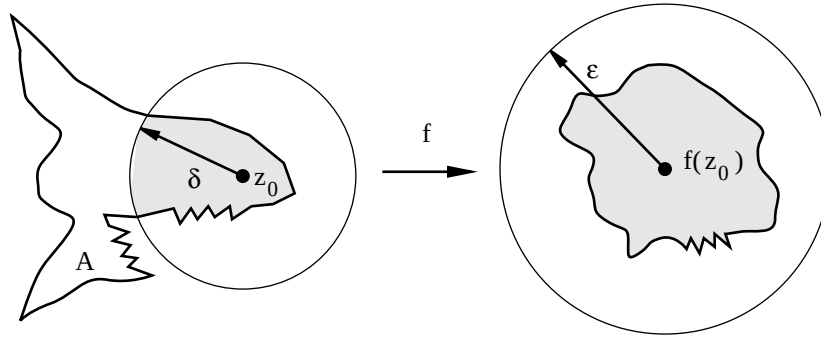
Αν στον ορισμό της συνέχειας αντικαταστήσουμε τα $|z - z_0| < \delta$ με $z_0 \in D(z_0, \delta)$ και $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ με $f(z) \in D(f(z_0), \varepsilon)$ ή ισοδύναμα $z \in f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$, ο ορισμός παίρνει την παρακάτω μορφή

Πρόταση 2.5.1. Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής στο z_0 εάν και μόνο εάν για κάθε δίσκο $D(f(z_0), \varepsilon)$ υπάρχει κατάλληλος δίσκος $D(z_0, \delta)$ ώστε αν περιορίσουμε την συνάρτηση σε αυτόν η τιμές να ανήκουν στον πρώτο δηλαδή

$$\begin{aligned} f(D(z_0, \delta) \cap A) &\subseteq D(f(z_0), \varepsilon) \\ &\text{ή ισοδύναμα} \\ D(z_0, \delta) &\subseteq f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon)) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.5.1. Για την συνέχεια σε ένα σημείο είναι καθοριστικό το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αν δηλαδή περιορίσουμε μια συνάρτηση την συνάρτηση σε ένα μικρότερο πεδίο ορισμού τότε ενδεχομένως ο περιορισμός να είναι συνεχής χωρίς η αρχική συνάρτηση να είναι συνεχής, Αν αυτό δεν ήταν σωστό τότε θα είχαμε μόνο συνεχείς συναρτήσεις σε όλα τους τα σημεία διότι θα τις περιορίζαμε σε τυχόν μονοσύνολο z_0 που το στοιχείο του είναι μεμονωμένο. Οι περιορισμοί που επεκτείνουν την συνέχεια είναι αυτοί που γίνονται σε ολόκληρη περιοχή του z_0 δηλαδή σε σύνολα της μορφής $D(z_0, r) \cap A$ όπου A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σύνολο όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του.



Σχήμα 2.2:

Χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες της συνέχειας που αναφέραμε είναι εύκολη η απόδειξη της παρακάτω ιδιαίτερα χρήσιμης πρότασης.

Πρόταση 2.5.2. Μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A είναι συνεχής σε αυτό, εάν και μόνο εάν αντιστρέφει κάθε ανοικτό υποσύνολο O του επιπέδου σε ανοικτό ως προς το A , δηλαδή $f^{-1}(O) = O_1 \cap A$, όπου O_1 ανοικτό στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 2.5.3. Αν μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο A είναι συνεχής σε αυτό, $K \subseteq A$ συμπαγές και $C \subseteq A$ συνεκτικό τότε $f(K)$ συμπαγές και $f(C)$ συνεκτικό.

Ο αναγνώστης μπορεί να κάνει την απόδειξη συνδυάζοντας την προηγούμενη πρόταση με τους ορισμούς του συμπαγούς και συνεκτικού συνόλου.

Πόρισμα 2.5.1. Κάθε ευθεία, ημιευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα είναι συνεκτικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου.

Στον ορισμό της συνέχειας σε σημείο z_0 για να επιτύχουμε την προσέγγιση ϵ χρησιμοποιήσαμε $\delta = \delta(\epsilon)$ χωρίς να πούμε ότι εξαρτάται από το z_0 επειδή το θεωρήσαμε σταθερό. Όταν όμως έχουμε συνέχεια σε σύνολο δεν σημαίνει ότι την προσέγγιση ϵ την επιτυγχάνουμε με το ίδιο δ σε όλα τα σημεία ταυτόχρονα, δηλαδή πρέπει να γράφουμε $\delta = \delta(x, \epsilon)$. Στην πολύ καλή περίπτωση που οποιαδήποτε προσέγγιση ϵ την επιτυγχάνουμε ταυτόχρονα με "ομοιόμορφο τρόπο στο πεδίο ορισμού" η συνέχεια λέγεται ομοιόμορφη

Ορισμός 2.5.2. Μια μιγαδική συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα σύνολο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ για κάθε $z_1, z_2 \in A$ με $|z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon)$.

Ισοδύναμη πρόταση με αυτή της ομοιόμορφης συνέχειας είναι η παρακάτω.

Πρόταση 2.5.4. Μια μιγαδική συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα σύνολο A αν και μόνο εάν για κάθε ζεύγος ακολουθιών $z_n, w_n \in A$ με την ιδιότητα $|z_n - w_n| \rightarrow 0$, ισχύει $|f(z_n) - f(w_n)| \rightarrow 0$.

Σε πολλές περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 2.5.2. Αν μια μιγαδική συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα συμπαγές σύνολο τότε είναι ομοιόμορφα συμπαγής σε αυτό.

Οι ορισμοί οι προτάσεις και τα θεωρήματα που έχουμε χρησιμοποιήσει ως μετρικό χώρο στο μιγαδικό επίπεδο γενικεύονται χωρίς κόπο σε οποιοδήποτε μετρικό χώρο. Προτιμήσαμε να τα δώσουμε στο μιγαδικό επίπεδο για να έχουμε μια καλύτερη αμεσότητα με την χρήση τους στα επόμενα κεφάλαια.

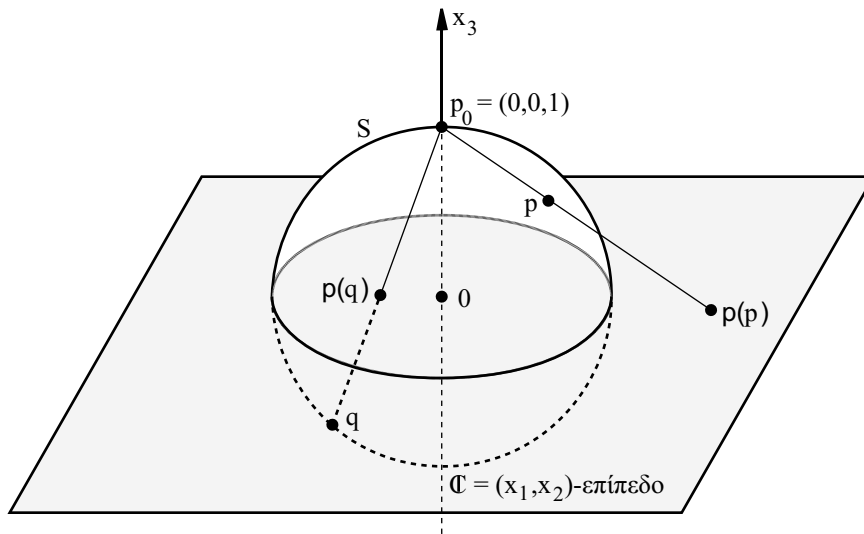
2.6 Συμπαγοποίηση του επιπέδου

Θυμίζουμε ότι στην πραγματική ευθεία επισυνάψαμε δύο σημεία που ορίσαμε το ένα να είναι μεγαλύτερο όλων των πραγματικών αριθμών και το άλλο μικρότερο όλων. Το νέο σύνολο $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ συνέχισε να είναι ολικά διατεταγμένο, έγινε εκτός από κλειστό και φραγμένο δηλαδή συμπαγές αλλά έχασε την δομή του σώματος.

Ενας τρόπος συμπαγοποίησης του $\mathbb{R}$ είναι ο εξής. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$. Παρατηρούμε ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη συνεχής και $f(0, 1) = \mathbb{R}$. Εφόσον το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ μετασχηματίστηκε ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ μας λείπουν δύο σημεία για την επέκταση της απεικόνισης στο συμπαγές διάστημα $[0, 1]$. Με την επισύναψη των $\pm\infty$ και την επέκταση $f(0) = -\infty$, $f(1) = +\infty$ Με την συνάρτηση f^{-1} μετασχηματίζουμε με ομοιομορφισμό την επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών στο συμπαγές διάστημα $[0, 1]$ επιτυγχάνοντας την συμπαγοποίηση της .

Επειδή στο μιγαδικό επίπεδο δεν έχουμε το πρόβλημα της διάταξης για μια ανάλογη συμπαγοποίηση δεν μας χρειάζονται δύο πρόσθετα στοιχεία αλλά μόνο ένα.

Το πρώτο βήμα είναι να μετασχηματίσουμε το επίπεδο σε επιφάνεια τρύπιας μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε την επιφάνεια της σφαίρας $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ και το επίπεδο του ισημερινού κύκλου που απαρτίζεται από τα σημεία της μορφής $(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ που το ταυτίζουμε γεωμετρικά με τα σημεία $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου. Αν $p_0 = (0, 0, 1)$ το σημείο βόρειος πόλος της σφαίρας για τυχόν σημείο $p \neq p_0$ στην επιφάνεια S η ευθεία που περνάει από τα δύο προηγούμενα σημεία τέμνει το μιγαδικό επίπεδο στο σημείο $P(p)$. Γεωμετρικά είναι φανερό ότι με την παραπάνω διαδικασία κατασκευάσαμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της τρύπήμενης στον βόρειο πόλο επιφάνειας της σφαίρας $S - \{p_0\}$ επί του μιγαδικού επιπέδου.



Σχήμα 2.3:

Μετά τους υπολογισμούς προκύπτουν οι τύποι

$$(x_1, x_2, x_3) \in S - \{p_0\} \rightarrow P(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow P^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S - \{p_0\}$$

Από τους παραπάνω τύπους προκύπτει ότι οι συναρτήσεις P και P^{-1} είναι συνεχείς με άλλα λόγια αποτελούν ομοιομορφισμούς ανάμεσα στους χώρους $\mathbb{C}$ και $S - \{p_0\}$ μεταφέροντας τα ανοικτά σύνολα του ενός στα ανοικτά του άλλου.

Την τοπολογική ταύτιση των δύο παραπάνω χώρων μπορούμε να την δούμε ακόμη καλύτερα εισάγοντας την παρακάτω νέα μετρική στο μιγαδικό επίπεδο. Αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος σημείων (z_1, z_2) στο μιγαδικό επίπεδο, ορίζουμε σαν χορδική απόσταση $X(z_1, z_2)$ την ευκλείδεια απόσταση των εικόνων τους στο $S - \{p_0\}$ δηλαδή

$$X(z_1, z_2) = |P^{-1}(z_1) - P^{-1}(z_2)| = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}.$$

Η νέα μετρική στο μιγαδικό επίπεδο είναι ισοδύναμη με την ευκλείδεια με την έννοια ότι παράγει τα ίδια ανοικτά και κλειστά σύνολα και επομένως τίποτα δεν αλλάζει στην σύγκλιση με όποια μετρική να την μελετάμε. Εφόσον το επίπεδο συσυρρινώθηκε ομοιόμορφα και μετασχηματίστηκε σε τρύπημένη επιφάνεια σφαίρας ένα σημείο μας λείπει για να βουλώσουμε την τρύπα.

Σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα επισυνάπτουμε στο μιγαδικό επίπεδο ένα σημείο που το ονομάζουμε ∞ και το σύνολο $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ονομάζουμε επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Στη συνέχεια επεκτείνουμε την συνάρτηση P στην επιφάνεια S ορίζοντας $P(0, 0, 1) = \infty$ και την χορδική απόσταση στο $\mathbb{C}_\infty$ με την σχέση

$$X(z, \infty) = |P^{-1}(z) - P^{-1}(\infty)| = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις P και P^{-1} διατηρούν τις αποστάσεις ανάμεσα στους χώρους $\mathbb{C}$ και S , δηλαδή είναι ισομετρίες οπότε οι προηγούμενοι χώροι είναι ισομετρικά ομοιόμορφοι. Τώρα είναι φανερό ότι επειδή το S είναι συμπαγές και το $P(S) = \mathbb{C}_\infty$ θα είναι συμπαγές. Η απεικόνιση P ονομάζεται στερεογραφική προβολή. Με βάση την παραπάνω τοπολογική ταύτιση οποιαδήποτε

ερωτήματα έχουμε για θέματα σύγκλισης στο $\mathbb{C}_\infty$ προβάλλονται σε ισοδύναμα ερωτήματα στην επιφάνεια S .

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι παρακάτω επισημάνσεις.

Τα σύνολα της μορφής $\Delta[\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$ είναι ανοικτές περιοχές του απείρου.

Ενα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου (δηλαδή δεν περιέχει το άπειρο) είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}_\infty$ εάν και μόνο εάν είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$. Το ∞ είναι εσωτερικό σημείο ενός ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}_\infty$ εάν υπάρχει περιοχή $\Delta[\infty, r) \subseteq A$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{C}_\infty$ είναι συμπαγής όλα τα κλειστά του υποσύνολα είναι συμπαγή. Λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι δεν είναι όλα τα κλειστά του μιγαδικού επιπέδου κλειστά και στο επεκτεταμένο αλλά μόνο τα συμπαγή.

Σχετικά με τα όρια ακολουθιών, αν μια ακολουθία στοιχείων του μιγαδικού επιπέδου συγκλίνει σε στοιχείο του μιγαδικού επιπέδου με την ευκλείδεια μετρική δεν αλλάζει τίποτα στη νέα κατάσταση. Η σύγκλιση $z_n \rightarrow \infty$ δηλαδή $X(z_n, \infty) = |P^{-1}(z_n) - p_0| \rightarrow 0$ είναι ισοδύναμη με $|z_n| \rightarrow +\infty$.

Δεν είναι όλες οι πράξεις με το άπειρο επιτρεπτές αλλά μόνο αυτές που είναι συμβατές με τον λογισμό των ορίων που είναι οι παρακάτω:

- $\infty + z = z + \infty$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- $\infty \cdot z = z \cdot \infty$ για κάθε $z \in \mathbb{C}_\infty - \{0\}$.
- $z/\infty = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- $z/0 = \infty$ για κάθε $z \in \mathbb{C}_\infty - \{0\}$.
- Δεν έχουν νόημα οι πράξεις $\infty \pm \infty, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, 0/0$.

Κεφάλαιο 3

Διαφορίσιμες και αναλυτικές συναρτήσεις

3.1 Διαφορισιμότητα και συνθήκες Cauchy-Riemann

Μετά τον ορισμό του ορίου η γενίκευση της έννοιας της παραγώγου στο μιγαδικό επίπεδο, προκύπτει αυθόρμητα σαν απομίμηση της διαδικασίας της πραγματικής παραγώγου αντικαθιστώντας το x με z .

Ορισμός 3.1.1. Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι ορισμένη σε σύνολο A , z_0 σημείο συσσωρεύσεως του A που να ανήκει σε αυτό και ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a,$$

τότε ο αριθμός a ορίζεται σαν η παράγωγος της f στο z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$.

Ο παραπάνω ορισμός έχει την εξής ισοδύναμη και ιδιαίτερα χρήσιμη εκδοχή. Αν $\Delta z = (z - z_0)$, $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0)$ και υπάρχει αριθμός $a \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$\Delta f(z) = a\Delta z + \Delta z E(\Delta z) \text{ με } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} E(\Delta z) = 0$$

τότε ο αριθμός a ορίζεται σαν η παράγωγος της f στο z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$. Η απομίμηση στην οποία αναφερθήκαμε είναι επί της διαδικασίας και όχι επί της ουσίας γιατί η επέκταση συνιστά μια τεράστια ποιοτική διαφορά με καταπληκτικά αποτελέσματα που είναι και το αντικείμενο της μιγαδικής ανάλυσης.

Θα επιχειρήσουμε με τα στοιχεία που έχουμε στη διάθεσή μας, χωρίς να κάνουμε σοβαρές μαθηματικές αβαρίες, να διαπιστώσουμε ορισμένα από τα ποιοτικά στοιχεία της διαφοράς που αναφέραμε.

Η πρώτη εμφανής διαφορά που αναφέρουμε είναι ότι στην πραγματική παράγωγο το όριο προκύπτει από την "κίνηση" του x προς το x_0 επάνω στην πραγματική ευθεία ενώ στην μιγαδική παράγωγο παρότι έχουμε επιλογή άπειρης ποικιλίας δρόμων από το z στο z_0 η συνάρτηση αντέχει τους "σκληρούς περιορισμούς που χρειάζονται" ώστε η διαδικασία να καταλήγει σε ενιαίο όριο για όλους τους δρόμους ανεξαιρέτως. Με άλλα λόγια υπεισέρχεται ποιοτική διαφορά του πεπερασμένου από το άπειρο.

Στην περίπτωση που $f'(z_0) \neq 0$ προσεγγίζοντας το z_0 "από δύο διαφορετικούς δρόμους" έχουμε

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} \arg \frac{\Delta f(z_1)}{\Delta z_1} = \arg f'(z_0),$$

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_0} \arg \frac{\Delta f(z_2)}{\Delta z_2} = \arg f'(z_0)$$

και μετά την αφαίρεση προκύπτει ότι για $\Delta z_1, \Delta z_2 \rightarrow 0$ ισχύει

$$(\arg \Delta f(z_1) - \arg \Delta f(z_2)) - (\arg \Delta z_1 - \arg \Delta z_2) \rightarrow 0,$$

και σε πιο ελεύθερη γλώσσα

$$\theta(f(z_1), f(z_0), f(z_2)) \approx \theta(z_1, z_0, z_2) \text{ κοντά στο } z_0.$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι για την συνάρτηση $f = u + iv$ τα u και v έχουν την κατάλληλες σχέσεις μεταξύ τους ώστε το ζεύγος $(u(z), v(z))$ να στρέφεται περί από το $(u(z_0), v(z_0))$ "όσο" το (x, y) περί το (x_0, y_0) . Θα επανέλθουμε με πιο αυστηρή γλώσσα στην έννοια της διατήρησης των γωνιών από συνάρτηση f .

Η συνάρτηση $\bar{z} = x - iy$ αν και αποτελεί ζεύγος δύο διαφορισίμων πραγματικών συναρτήσεων δεν παραγωγίζεται στο μηδέν. Πράγματι αν στην συνάρτηση $\frac{\bar{z} - 0}{z - 0}$ θέσουμε $z = h \in \mathbb{R}$ για $h \rightarrow 0$ το όριο είναι 1. Αν $z = ih, h \in \mathbb{R}$ για $h \rightarrow 0$ το όριο είναι -1 . (Η στροφή κατά $\pi/2$ του z γύρω από το μηδέν προκαλεί στροφή κατά π του $\bar{z}$).

Στο επίπεδο, με τα εργαλεία του διανυσματικού χώρου, έχουμε γνωρίσει την μερική διαφορισιμότητα (μερικές παράγωγοι) και την διαφορισιμότητα μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών. Για να αναδείξουμε τα ποιοτικά στοιχεία της διαφοράς αλλά και την σχέση τους με την μιγαδική παράγωγο θεωρούμε αναγκαίο να τα ξαναθυμίσουμε και να τα αποδώσουμε σε μιγαδική γλώσσα.

Έστω μιγαδική συνάρτηση $f(z) = f(x, y)$ ορισμένη σε περιοχή του $z_0 = (x_0, y_0)$. Η μερική παράγωγος της f ως προς x στο (x_0, y_0) ορίζεται από την παράγωγο της συνάρτησης $f^*(x) = f(x, y_0)$ στη θέση x_0 και συμβολίζεται με $f_x(z_0)$. Ομοίως ορίζεται και η $f_y(z_0)$. Αν $f = u + iv$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0)$ υπάρχει εάν και μόνο εάν υπάρχουν οι $u_x(x_0, y_0), v_x(x_0, y_0)$ και στην περίπτωση αυτή ισχύει $f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.

Παρατηρούμε ότι για να συνθέσουμε μια μερικά παραγωγίσιμη (μερικά διαφορίσιμη) μιγαδική συνάρτηση στο z_0 επιλέγουμε ελεύθερα οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών μερικά διαφορίσιμων συναρτήσεων στο σημείο αυτό κάτι που δεν ισχύει για μιγαδικά παραγωγίσιμη όπως φάνηκε στο παράδειγμα της $\bar{z}$.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε μια αναγκαία συνθήκη μιγαδικής παραγωγισιμότητας σε σημείο.

Θεώρημα 3.1.1. Αν $f = u + iv$ είναι μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του σημείου z_0 στο οποίο είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη τότε ισχύουν τα παρακάτω.

1. Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(z_0), f_y(z_0)$ και ισχύει

$$f_x(z_0) = -if_y(z_0),$$

ή ισοδύναμα

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ και } u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0).$$

2. Για την παράγωγο ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f_x(z_0) = -if_y(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι να πάρουμε δύο φορές την τιμή της παραγώγου επιλέγοντας οριζόντιο και κατακόρυφο δρόμο προς το z_0 . Πιο συγκεκριμένα Για $h \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(z_0)$$

και

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = -if_y(z_0).$$

Οι αναγκαίες συνθήκες μιγαδικής παραγωγισιμότητας που περιγράψαμε θα αναφέρονται και δώ μα την εδραιωμένη ιστορικά ονομασία συνθήκες Cauchy-Riemann (C-R). Στο ερώτημα τι περισσότερο πρέπει να προσθέσουμε στις συνθήκες Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ ώστε να επιτύχουμε ικανές συνθήκες διαφορισιμότητας η απάντηση βρίσκεται στην πιο ισχυρή έννοια από την μερική παραγωγισιμότητα που γνωρίσαμε στο παρελθόν, δηλαδή, την διαφορισιμότητα με την πραγματική έννοια ή πραγματική διαφορισιμότητα. Ας θυμηθούμε όμως καλύτερα τους ορισμούς.

Ορίζουμε ότι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του $z_0 = (x_0, y_0)$ είναι πραγματικά διαφορίσιμη(ή διαφορίσιμη με την πραγματική έννοια ή $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη) εάν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$u(z) - u(z_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + |z - z_0|E_u(z)$$

με $\lim_{z \rightarrow z_0} E_u(z) = 0$.

Στην παραπάνω περίπτωση αποδείχεται εύκολα ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο z_0 και ισχύει $u_x(z_0) = a$, $u_y(z_0) = b$.

Ορίζουμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση $f = u + iv$ ορισμένη σε περιοχή του $z_0 = (x_0, y_0)$ είναι πραγματικά διαφορίσιμη(διαφορίσιμη με την πραγματική έννοια ή $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη) όταν οι u και v είναι τέτοιες.

Αφήνεται στον αναγνώστη να αποδείξει την πρόταση:

Μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του $z_0 = (x_0, y_0)$ είναι $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη στο σημείο z_0 εάν και μόνο εάν είναι μερικά παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(z) - f(z_0) = (x - x_0)f_x(z_0) + (y - y_0)f_y(z_0) + (z - z_0)E_f(z)$$

με $\lim_{z \rightarrow z_0} E_f(z) = 0$.

Αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, f_z = \frac{f_x - if_y}{2}, f_{\bar{z}} = \frac{f_x + if_y}{2}$$

γράφεται στην ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή

$$\Delta f(z) = \Delta z f_z(z_0) + \overline{\Delta z} f_{\bar{z}}(z_0) + \Delta z E_f(\Delta z)$$

με $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} E_f(\Delta z) = 0$. □

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα που υπαινιχτήκαμε.

Θεώρημα 3.1.2. Μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή ενός σημείου z_0 είναι μιγαδικά διαφορίσιμη (παραγωγίσιμη) στο z_0 εάν και μόνο εάν είναι $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη και ισχύουν οι συνθήκες C-R στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Αν κάνουμε μια σύγκριση του ορισμού της μιγαδικής παραγώγου στη δεύτερη μορφή που δώσαμε, δηλαδή

$$\Delta f(z) = a \Delta z + \Delta z E(\Delta z)$$

με $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} E(\Delta z) = 0$

και του ορισμού της διαφορισιμότητας με την πραγματική έννοια

$$\Delta f(z) = \Delta z f_z(z_0) + \overline{\Delta z} f_{\bar{z}}(z_0) + \Delta z E_f(\Delta z)$$

με $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} E_f(\Delta z) = 0$.

Παρατηρούμε ότι στην πραγματική διαφορισιμότητα υπάρχει ο επί πλέον παράγοντας $\overline{\Delta z} f_{\bar{z}}(z_0)$. Η συνθήκη C-R $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$ ισοδυναμεί με την $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ από την οποία η σχέση της διαφορισιμότητας με την πραγματική έννοια μετατρέπεται στην σχέση της μιγαδικής παραγωγισιμότητας που γνωρίσαμε στην αρχή. Μπορούμε βέβαια να διαιρέσουμε με Δz και να πάρουμε $f_z(z_0) + E(\Delta z) = \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$, οπότε για $\Delta z \rightarrow 0$ παίρνουμε το ζητούμενο συμπέρασμα. □

Παρατηρήσεις 3.1.1. 1. Επειδή υπάρχει ένας κίνδυνος να υπάρξουν συγχύσεις σχετικά με τις παραγωγισιμότητες και διαφορισιμότητες πρέπει να επισημοποιήσουμε μια συμφωνία σχετικά με την ορολογία.

Μερικά παραγωγίσιμη σε σημείο έχουμε όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο σημείο αυτό. Διαφορισίμη με την πραγματική έννοια ή πραγματικά διαφορίσιμη ή $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη είναι αυτή που ορίσαμε όπως ήταν γνωστή και σαν ολικά διαφορίσιμη από την πραγματική Ανάλυση.

Όταν οι έννοιες δεν συνοδεύονται από κανένα προσδιορισμό, δηλαδή όταν χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό διαφορίσιμη ή παραγωγίσιμη (σχέτο) στο z_0 θα εννοούμε την ύπαρξη της μιγαδικής παραγώγου και ο προσδιορισμός μιγαδικά θα παραλείπεται.

Όλες οι παραπάνω έννοιες είναι σημειακές και η αναφορά τους σε σύνολο έχει την έννοια ότι ισχύουν σε όλα τα σημεία του συνόλου, πχ διαφορίσιμη σε σύνολο A σημαίνει διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A .

2. Οι συμβολισμοί $f_z, f_{\bar{z}}$ δεν είναι τυχαίοι γιατί συμβολίζουν τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους που θα προκύψουν αν στην συνάρτηση θέσουμε $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ και θεωρήσουμε τα $z, \bar{z}$ σαν ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες $C-R$ συνοψίζονται στην σχέση $f_{\bar{z}} = 0$ και σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η μορφή διευκολύνει. Π.χ η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη διότι $f_{\bar{z}} = 1 > 0$, ενώ η συνάρτηση $g(z) = z^2$ παρά το γεγονός ότι είναι παντού $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη επειδή $g_{\bar{z}}(z) = 2\bar{z}$ είναι διαφορίσιμη μόνο στο σημείο μηδέν.

Για την μετάβαση από την πραγματική στη μιγαδική διαφορισιμότητα με το σχήμα

$$\mathbb{R}\text{-διαφορίσιμη} + C\text{-}R = \text{διαφορίσιμη}$$

δεν είναι πάντα εύκολος ο έλεγχος της πραγματικής διαφορισιμότητας μέσω του ορισμού της. Στο σημείο αυτό θα επικαλεστούμε την βοήθεια ενός ιδιαίτερα χρήσιμου θεωρήματος της πραγματικής ανάλυσης.

Θεώρημα 3.1.3. Αν σε πραγματική συνάρτηση $u(x, y)$ υπάρχουν οι μερικές u_x, u_y σε περιοχή σημείου (x_0, y_0) και είναι συνεχείς σε αυτή τότε η συνάρτηση είναι $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) .

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται χωρίς κόπο σε μιγαδικές συναρτήσεις όσον αφορά την πραγματική διαφορισιμότητα.

Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις που αποτελούν επέκταση των αντίστοιχων της πραγματικής ανάλυσης.

Πρόταση 3.1.1. Αν f, g μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες σε περιοχή του z_0 και διαφορίσιμες σε αυτό τότε,

i) Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο z_0 .

ii) Οι συναρτήσεις $f \pm g$, και fg είναι διαφορίσιμες στο z_0 και ισχύουν,

- $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$,
- $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$.
- Αν η g δεν έχει ρίζες σε περιοχή του z_0 τότε η $\frac{f}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο z_0 και ισχύει

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Πρόταση 3.1.2. Αν g είναι μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή U_{z_0} του σημείου z_0 , f συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή $V_{g(z_0)}$ του σημείου $g(z_0)$, με $g(U_{z_0}) \subseteq f(V_{g(z_0)})$, και επί πλέον g, f διαφορίσιμες στο z_0 και $g(z_0)$ αντίστοιχα, τότε η

$$f \circ g \text{ είναι διαφορίσιμη στο } z_0 \text{ και ισχύει } (f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$$

Η διαδικασία των αποδείξεων δεν διαφέρει από τις αντίστοιχες των πραγματικών παραγώγων και γιαυτό θα περιοριστούμε σε μια συνοπτική απόδειξη τελευταίας πρότασης.

Από την διαφορισιμότητα των f, g έχουμε,

$$\begin{aligned}\Delta f(Z) &= f'(Z_0)\Delta Z + \Delta Z E_f(\Delta Z), \\ \Delta g(z) &= g'(z_0)\Delta z + \Delta z E_g(\Delta z).\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε

$$Z = g(z) \text{ και } Z_0 = g(z_0)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta f(g(z)) &= f'(g(z_0))\Delta g(z) + \Delta g(z)E_f(\Delta g(z)) \\ &= \Delta z f'(g(z_0))g'(z_0) + \Delta z E_{f \circ g}(\Delta z)\end{aligned}$$

με $E_{f \circ g}(\Delta z) \rightarrow 0$ όταν $z \rightarrow 0$.

Ορισμός 3.1.2. Θα λέμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση είναι αναλυτική (στη βιβλιογραφία θα την συναντήσετε και σαν ολόμορφη) στο σύνολο A αν είναι παραγωγίσιμη σε περιοχή του συνόλου A δηλαδή σε ανοικτό σύνολο O με $A \subseteq O$.

Παρά το γεγονός ότι ο ορισμός είναι απλός η πείρα υπαγορεύει ιδιαίτερη προσοχή στη διαφορά παραγωγισιμότητας (διαφορισιμότητας) και αναλυτικότητας. Όπως είπαμε η παραγωγισιμότητα είναι σημειακή έννοια ενώ η αναλυτικότητα τοπική, δηλαδή αφορά παραγωγισιμότητα σε ανοικτά σύνολα. Η αναλυτικότητα σε σημείο σημαίνει παραγωγισιμότητα σε ολόκληρη ανοικτή περιοχή του σημείου. Φυσικά όταν το σύνολο A είναι ανοικτό επειδή είναι περιοχή του εαυτού του η παραγωγισιμότητα στο σύνολο και η αναλυτικότητα σε αυτό είναι ταυτόσημες έννοιες.

Θεώρημα 3.1.4. Αν μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε τόπο OC έχει παράγωγο μηδέν σε όλα τα σημεία του τόπου τότε είναι σταθερή.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την παρακάτω γνωστή πρόταση της πραγματικής ανάλυσης

Πρόταση 3.1.3. Αν πραγματική συνάρτηση $u(x, y)$ ορισμένη σε τόπο OC έχει μερικές παραγώγους μηδέν σε όλα τα σημεία του τόπου τότε είναι σταθερή.

Θα δώσουμε την απόδειξη της παραπάνω πρότασης επειδή πολλές φορές υποκαθίσταται από το σύνθημα

“ η μερική παράγωγος ως προς x μηδενίζεται άρα ανεξάρτητος του x , ομοίως και ως προς y και σαν ανεξάρτητη από τις μεταβλητές είναι σταθερή”.

Σε αυτό το υποκατάστατο απόδειξης δεν χρειάστηκε η υπόθεση του τόπου ούτε φάνηκε πουθενά κανένα διάστημα που εφαρμόσαμε το σχετικό θεώρημα του απειροστικού λογισμού για την παράγωγο.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε κλειστό οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα υποσύνολο του τόπου, δηλαδή σύνολο της μορφής $\{(x, y_0) : a \leq x \leq b\}$ και θεωρήσουμε την συνάρτηση $u_{y_0}(x) = u(x, y_0)$ έχουμε $(u_{y_0})'(x) = u_x(x, y_0) = 0$ στο $[a, b]$ που σημαίνει ότι ο περιορισμός της συνάρτησης u σε τυχόν οριζόντιο διάστημα του τόπου είναι σταθερή συνάρτηση. Ομοίως και σε κατακόρυφο. Είναι γνωστό ότι οι τόποι είναι κλιμακωτά συνεκτικά σύνολα οπότε αν πάρουμε δύο σημεία z_0 και z υπάρχει πολυγωνική γραμμή που τα συνδέει και αποτελείται από διαδοχικά οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots [z_k, z]$. Από την προηγούμενη διαπίστωση έχουμε $u(z_0) = u(z_1) = \dots u(z)$. $\square$

Απόδειξη. (του θεωρήματος)

Από την υπόθεση και τις συνθήκες C-R έχουμε $0 = f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z)$.

Επειδή μηδενίζονται όλες οι μερικοί παράγωγοι με βάση το προηγούμενο λήμμα η συνάρτηση $f = u + iv$ είναι σταθερή. $\square$

Παραδείγματα 3.1.1. Έστω $f = u + iv$ αναλυτική συνάρτηση σε τόπο OC .

- (i) Αν το μέτρο της συνάρτησης παραμένει σταθερό στον τόπο να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση είναι σταθερή
- (ii) Αν $au + bv = c$ με $a^2 + b^2 \neq 0$ να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση είναι σταθερή.
- (iii) Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $f = u + iv$ τέτοια ώστε

$$au + bv + d(u^2 + v^2) = c \text{ με } a, b, d, c \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. (i) Από την σχέση $|f|^2 = u^2 + v^2 = c$ παίρνοντας τις μερικές παραγώγους έχουμε

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0$$

και με την εφαρμογή των συνθηκών C-R

$$uu_x - vu_y = 0, \quad vu_x + uu_y = 0$$

Αν $c \neq 0$ (η περίπτωση της ισότητας με μηδέν είναι τετριμμένη) τότε επειδή η ορίζουσα του συστήματος ως προς u_x, u_y είναι $u^2 + v^2 = c \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση $u_x = u_y = 0$.

Με την εφαρμογή των συνθηκών C-R ($v_x = v_y = 0$). προκύπτει ότι όλες οι μερικές παράγωγοι είναι μηδέν και επειδή το πεδίο ορισμού είναι τόπος η συνάρτηση είναι σταθερή.

- (ii) Η απόδειξη μπορεί χωρίς πρόβλημα να γίνει από τον αναγνώστη αντιγράφοντας σχεδόν την διαδικασία του προηγούμενου σκέλους.
- (iii) Για $d = 0$ το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε στο προηγούμενο σκέλος. Για $d \neq 0$ η συνθήκη ισοδυναμεί με εξίσωση κύκλου

$$\left(u + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(v + \frac{b}{2d}\right)^2 = \frac{c}{d} + \frac{a^2}{4d^2} + \frac{b^2}{4d^2},$$

οπότε αναγκαία συνθήκη ύπαρξης αναλυτικής συνάρτησης είναι η σχέση

$$\frac{c}{d} + \frac{a^2}{4d^2} + \frac{b^2}{4d^2} \geq 0$$

Η προηγούμενη σχέση σε μιγαδική μορφή γράφεται $|F(z)| = C$ για κάθε $z \in OC$ όπου

$$F = f + \frac{a + ib}{2d} \quad \text{και} \quad C = \sqrt{\frac{c}{d} + \frac{a^2}{4d^2} + \frac{b^2}{4d^2}}$$

Με βάση το συμπέρασμα του πρώτου σκέλους η συνάρτηση F επομένως και η f είναι σταθερές. Το σύνολό επομένως αποτελείται από τις συναρτήσεις $f_t(z) = -\frac{a + ib}{2d} + z \cdot C \cdot e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ και είναι απείρου πλήθους εκτός από την περίπτωση $C = 0$ που είναι μονοσύνολο.

□

Παρατηρήσεις 3.1.2. 1. Το τρίτο σκέλος λειτουργεί ως ομπρέλα σε επιμέρους εκδοχές που συναντούμε πιο συχνά και γι αυτό τις αναφέρουμε.

Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε τόπο είναι σταθερή στην περίπτωση που ισχύει επί πλέον οποιαδήποτε από τις παρακάτω υποθέσεις.

Το πραγματικό μέρος είναι σταθερό ($a = 1, b = 0, d = 0$), παίρνει μόνο φανταστικές τιμές ($a = 1, b = c = d = 0$), Το φανταστικό μέρος είναι σταθερό ($b = 1, a = d = 0$), παίρνει μόνο πραγματικές τιμές ($b = 1, a = c = d = 0$).

2. Αν ρίξουμε μια συνολική γεωμετρική ματιά στην εφαρμογή που κάναμε απο το πρώτο σκέλος προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας μη σταθερής αναλυτικής συνάρτησης σε τόπο δεν μπορεί να συρικνωθεί σε κύκλο. Από το δεύτερο σκέλος προκύπτει ότι αποκλείεται να συρικνωθεί σε ευθεία. Το τρίτο σκέλος αποκλείει και την περίπτωση μιας πιο σύνθετης καμπύλης. Μετά την ματιά ακολουθεί η πρόκληση αν υπάρχει γραμμή του επιπέδου $F(u, v) = 0$ που περιέχει το σύνολο τιμών μιας μη σταθερής αναλυτικής συνάρτησης. Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με την εφαρμογή, δηλαδή

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}u_x + \frac{\partial F}{\partial v}v_x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}u_y + \frac{\partial F}{\partial v}v_y = 0$$

τελικά προκύπτει ότι στην περίπτωση που

$(\frac{\partial F}{\partial u})^2 + (\frac{\partial F}{\partial v})^2 > 0$ σε όλο σύνολο τιμών (u, v) της συνάρτησης f η συνάρτηση είναι αναγκαστικά σταθερή (λεπτομέρειες της απόδειξης αφήνονται στον αναγνώστη). Το ερώτημα αν υπάρχει γραμμή που μπορεί να φιλοξενήσει όλες τις τιμές μη σταθερής αναλυτικής συνάρτησης σε τόπο δε είμαστε ακόμη σε θέση να το απαντήσουμε. Για το ενδεχόμεν κάποιου ανυπόμονου απαντούμε ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει διότι το σύνολο τιμών αυτών των συναρτήσεων είναι ολόκληρο ανοικτό σύνολο.

Για την απόδειξη, υπομονή.....

Παράδειγμα 3.1.1. Να εξεταστούν ως προς την παραγωγισιμότητα και αναλυτικότητα σε όλο το μιγαδικό επίπεδο οι συναρτήσεις

$$e^{-y}(\cos x - y \sin x) + ie^{-y}(x \sin x + y \cos y), z \operatorname{Re} z \text{ και } 2z^{997} \operatorname{Re} z + 2iz^{1997} \operatorname{Im} z.$$

Σχετικά με την πρώτη συνάρτηση ένας έμπειρος διαχειριστής της μιγαδικής άλγεβρας του επιπέδου μπορεί να παρατηρήσει ότι πρόκειται για την αναλυτική συνάρτηση ze^{iz} και να τελειώσει. Επειδή η στατιστική σε αυτό δεν είναι ευνοϊκή προχωρούμε στη ν διερεύνηση των συνθηκών C-R και έχουμε,

$$\begin{aligned} f_x &= e^{-y}(\cos x - x \sin x - y \cos x) + ie^{-y}(\sin x + x \cos x - y \sin x) \\ f_y &= e^{-y}(\sin x - x \cos x + y \sin x) + ie^{-y}(-\cos x + x \sin x + y \cos x) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες C-R $f_x = -if_y$ ισχύουν σε όλο το επίπεδο. Επειδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς σε αυτό έχουμε και το επιπλέον στοιχείο της $\mathbb{R}$ -διαφορισιμότητας για να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο που είναι ανοικτό σύνολο οπότε είναι και αναλυτική.

Για την δεύτερη συνάρτηση $z \operatorname{Re} z = x^2 + ixy$, επειδή $f_x = 2x + iy$, $f_y = y$, είναι φανερό ότι οι συνθήκες C-R $f_x = -if_y$ ισχύουν μόνο στο σημείο $z = 0$, οπότε αυτό είναι το μόνο ενδεχόμενο σημείο παραγωγισιμότητας. Επειδή επί πλέον η συνάρτηση είναι και $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη στο σημείο μηδέν (υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς σε περιοχή του) θα είναι παραγωγίσιμη σε αυτό και ισχύει $f'(0) = f_x(0, 0) = 0$. (Αν μας είχε τεθεί ο περιορισμός ή είχαμε ξεχάσει την επί πλέον προϋπόθεση της πραγματικής διαφορισιμότητας τότε αναγκαστικά θα κάναμε τον έλεγχο με τον ορισμό της παραγώγου που στην περίπτωσή μας δεν υπάρχει καμία δυσκολία)

Για την τρίτη συνάρτηση και γενικά στις μορφές $f(z, \bar{z})$ μας διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες C-R στην ισοδύναμη μορφή $f_{\bar{z}} = 0$. Στην περίπτωση μας έχουμε $f(z, \bar{z}) = z^{997}(z + \bar{z}) + z^{1997}(z - \bar{z})$ και παραγωγίζοντας ως προς $\bar{z}$ παίρνουμε

$$f_{\bar{z}}(z, \bar{z}) = z^{997} - z^{1997} \text{ που μηδενίζεται για } z = 0 \text{ και } z^{1000} = 1.$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει ρίζες $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{1000}}$ $k = 0, 1, \dots, 999$. Το σύνολο των ριζών ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων παραγωγισιμότητας της συνάρτησης επειδή οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς παντού. Αν μας περίοριζαν να κάνουμε τον έλεγχο με τον ορισμό θα χρειαζόταν ασφαλώς πολύ

περισσότερη δουλειά από την προηγούμενη περίπτωση (θα ήταν καλό για την πρακτική άσκηση ενός άπειρου αναγνώστη να το επιχειρήσει). Η παράγωγος στα σημεία αυτά δίνεται από τις αντίστοιχες τιμές της

$$f_z(z, \bar{z}) = 998z^{997} + 997z^{996}\bar{z} + 1998z^{1997} - 1997z^{1996}\bar{z}$$

Οπότε

$$f'(0) = 0 \text{ και } f'(z_k) = 2996z_k^{-3} - 1000z_k^{-5}.$$

Παράδειγμα 3.1.2. Δώστε παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης ορισμένης σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο που το σύνολο των σημείων που παραγωγίζεται είναι η ένωση του κύκλου $|z| = 1$ με την διχοτόμο $y = x$.

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε αποτελεί “βιοτεχνία” κατασκευής τέτοιων παραδειγμάτων.

Το πρώτο βήμα είναι να φέρουμε την ζητούμενη γραμμή παραγωγισιμότητας στην μορφή $f(z, \bar{z}) = 0$. Στην περίπτωσή μας ο κύκλος γραφεται $z\bar{z} - 1 = 0$, αν θέσουμε $2x = (z + \bar{z})$, $2iy = (z - \bar{z})$, η εξίσωση της διχοτόμου γίνεται

$$z(i - 1) + \bar{z}(i + 1) = 0$$

και η ένωση των γραμμών εκφράζεται από το γινόμενο

$$f(z, \bar{z}) = z\bar{z}^2(1 - i) + z^2\bar{z}(1 - i) - z(i - 1) - \bar{z}(i + 1) = 0.$$

Το δεύτερο βήμα είναι να αντιμετωπίσουμε το $\bar{z}$ σαν αναξάρτητη με ταβλητή της $f(z, \bar{z})$ και να βρούμε μια παράγουσα ως προς αυτό. Στην περίπτωσή μας παίρνουμε την συνάρτηση

$$h(z) = \frac{1}{3}(1 + i)z\bar{z}^3 + \frac{1}{2}(1 - i)z^2\bar{z}^2 - \frac{1}{2}(1 + i)\bar{z}^2 - (1 - i)z\bar{z} + C.$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι πραγματικά διαφορίσιμη και επειδή $h_{\bar{z}} = f(z, \bar{z})$ πληροί τις ζητούμενες προϋποθέσεις. στα σημεία που υπάρχει η παράγωγός της δίνεται από την σχέση

$$h'(z) = h_z(z) = \frac{1}{3}(1 + i)\bar{z}^3 + (1 - i)z\bar{z}^2 - (1 - i)\bar{z}$$

3.2 Αναλυτικές επεκτάσεις πραγματικών συναρτήσεων

Στη λυκειακή κυρίως εκπαίδευση ορισμένες συναρτήσεις που έχουν μελετηθεί περισσότερο και χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα για την μελέτη άλλων συναρτήσεων τις αποκαλούν στοιχειώδεις.

Τέτοιες είναι τα πολυώνυμα, οι δυνάμεις οιασδήποτε μορφής, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ο λογάριθμος. Ο όρος στοιχειώδεις είναι μάλλον αδόκιμος και αν είναι πραγματικά αναγκαία η χρήση κάποιου χαρακτηρισμού θα προτιμούσα τον όρο θεμελιώδεις.

Ένα ερώτημα που τίθενται εδώ είναι ποιές από αυτές έχουν αναλυτική επέκταση σε τόπο και σε ποιόν.

Το επόμενο ερώτημα που προκύπτει είναι αν η αναλυτική επέκταση όσων έχουν είναι μοναδική. Στο δεύτερο ερώτημα δεν έχουμε αρκετά εργαλεία να απαντήσουμε σε αυτή τη φάση αλλά προαναγγέλλουμε ότι θα ακολουθήσει γενικότερο θεώρημα που θα απαντάει θετικά.

Τα επόμενα ερωτήματα αφορούν τις ιδιότητες αρχικής πραγματικής συνάρτησης επεκτείνονται και αυτές που δεν επεκτείνονται.

Τα πολυώνυμα προφανώς επεκτείνονται σε όλο το $\mathbb{C}$ και οι ρητές συναρτήσεις στον τόπο που προκύπτει αν από το μιγαδικό επίπεδο αφαιρέσουμε τις ρίζες του παρανομαστή.

3.2.1 Αναλυτική επέκταση της συνάρτησης e^x .

Για να βοηθηθούμε ας αναζητήσουμε μια αναλυτική επέκταση $E(z)$ που να κληρονομεί έστω μερικά την ιδιότητα των δυνάμεων δηλαδή

$$E(z) = E(x + iy) = e^x E(iy) = e^x (C(y) + iS(y))$$

Από τις συνθήκες $C - R$, $E_x = -iE_y$ παίρνουμε

$$e^x (C(y) + iS(y)) = e^x (-S'(y) + iC'(y)) \text{ ή } S' = C \text{ και } C' = -S$$

Επίσης από την σχέση $E(0) = e^0 = 1$ παίρνουμε $S(0) = 1 - C(0) = 0$. Όπως σε προηγούμενο εδάφιο αναφέραμε το ζεύγος των συναρτήσεων με τις παραπάνω ιδιότητες είναι το μοναδικό $(C(x), S(x)) = (\cos x, \sin x)$.

(Όσοι με βάση προηγούμενη υπόδειξή μας δεν απόδειξαν τον ισχυρισμό ας το κάνουν τώρα παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $(C(x) - \cos x)^2 + (S(x) - \sin x)^2$).

Αν τώρα θέσουμε $E(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ είναι προφανές ότι υπάρχουν οι μερικοί παράγωγοι και είναι συνεχείς σε όλο το μιγαδικό επίπεδο οπότε E αναλυτική και από τις συνθήκες $C - R$ προκύπτει $E'(z) = E_x(z) = -iE_y(z)$ ή $E'(z) = E(z)$. (θα καταλήγαμε στην ίδια επέκταση αν αντικαταστήσουμε την αρχική παραδοχή με την $E = E'$ και το συστήνουμε σαν άσκηση).

Είναι σχεδόν προφανείς οι σχέσεις

$$E(z_1 + z_2) = E(z_1)E(z_2), E(z)E(-z) = 1, E(nz) = E^n(z) \text{ για ακέραιους } n.$$

Παίρνοντας υπόψη το γεγονός ότι η αναλυτική επέκταση $E(z)$ υποδέχεται ορισμένες βασικές ιδιότητες της δύναμης e^x και την υπόσχεση ότι θα μας αποκαλύψει το μυστικό της μοναδικότητας, νομίζουμε ότι δικαιούται το βάπτισμα σε δύναμη e^z επισημοποιώντας έτσι και την ισότητα

$$e^{i\theta} = \operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στις ιδιότητες που δεν επεκτείνονται. Αναφέρω την πολυσύχναστο λάθος στην εξίσωση

$e^z = 1$ να δίδεται απάντηση $z = 0$ σαν μοναδική λύση ενώ έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων.

Πράγματι $|e^x e^{iy}| = 1$ ή $e^x = 1$ $x = 0$, $e^{iy} = 1$ και τελικά

έχουμε τις λύσεις $z_k = 2k\pi$, $k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$

3.2.2 Αναλυτική επέκταση του $\log x$.

Προκειμένου να ανιχνεύσουμε την επέκταση της έννοιας του λογαρίθμου σε τόπο οι ιδέες της πραγματικής ανάλυσης μας εξωθούν στη λύση της εξίσωσης $e^z = a$.

Επειδή $|e^z| = e^x = |a|$ πρέπει να υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ οπότε $x = \operatorname{Re} z = \log |a|$

Αν $\theta = \operatorname{Arg} a$ και $a = |a|e^{i\theta}$ τότε $e^{i(y-\theta)} = 1$ ή $y - \theta \in \{2k\pi, k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Αν ορίσουμε το σύνολο των λύσεων σαν $\log a$ τελικά έχουμε

$$\log a = \{\log |a| + i \operatorname{Arg} a + 2k\pi, k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots\} = \log |a| + i \arg a.$$

Καταναλογία με τα ορίσματα ονομάζουμε κύριο λογάριθμο του a τον αριθμό $\text{Log} a = \log |a| + i \text{Arg} a$ οπότε,

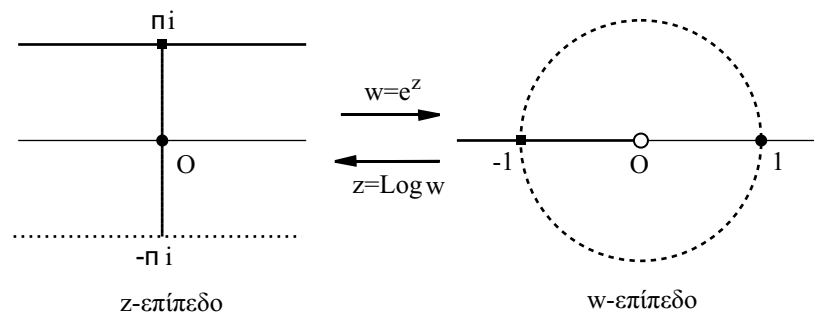
$$\log a = \{\text{Log}|a| + 2k\pi, k = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \dots\}.$$

Γενικώτερα ορίζουμε $\text{Log}_a z = \log |z| + i \text{Arg}_a z$.

Σχετικά με τον $\log z$ συνδυάζοντας τον ορισμό του με τις ιδιότητες του ορίσματος προκύπτει η σχέση

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Η συνάρτηση $\text{Log} z$ είναι ένα προς ένα και επί από το $C - \{0\}$ στην λωρίδα του επιπέδου $-\pi < \text{Im} z \leq \pi$. Για τον κύριο λογάριθμο δεν ισχύει στη γενική



Σχήμα 3.1:

περίπτωση ο κανόνας του γινομένου, αλλά καταναλογία μετα ορίσματα ισχύει,

$$\text{Log}(z_1 z_2 \dots z_n) = \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2 + \dots + \text{Log} z_n \iff$$

$$-\pi < \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + \dots + \text{Arg} z_n \leq \pi.$$

Αν $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $\text{Log}_a z = \log |z| + i \text{Arg}_a z$.

Η συνάρτηση κύριος λογάριθμος όπως ορίστηκε δεν είναι ούτε συνεχής επέκταση του πραγματικού λογαρίθμου διότι είναι ασυνεχής στην αρνητική πραγματική ημιευθεία. Αν όμως την αφαιρέσουμε από το επίπεδο ο περιορισμός της συνάρτησης στον τόπο που προκύπτει είναι συνεχής διότι ο περιορισμός της $\text{Arg} z$ είναι τέτοιος. Η συνεχής επέκταση που αναφέραμε στο $\mathbb{C}_{-\pi} = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$ είναι αναλυτική συνάρτηση.

Με την ευκαιρία θα αποδείξουμε κάτι γενικότερο αφού πρώτα δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.2.1. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $L(z)$ αποτελεί κλάδο του λογαρίθμου στον τόπο OC αν είναι ορισμένη και συνεχής σε τόπο OC επι πλέον ισχύει $e^{L(z)} = z$ για κάθε $z \in OC$.

Θεώρημα 3.2.1. 1. Κάθε κλάδος του λογαρίθμου είναι αναλυτική συνάρτηση και ισχύει $L'(z) = \frac{1}{z}$.

2. Αν δύο κλάδοι του λογαρίθμου είναι ορισμένοι στον ίδιο τόπο τότε η διαφορά τους είναι σταθερή συνάρτηση της μορφής $2k\pi i$ για κατάλληλο ακέραιο k . (Με άλλα λόγια αν βρούμε έναν τότε το σύνολό τους απαρτίζεται από τους κλάδους $L_k = L + 2k\pi i$, $k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$).

Απόδειξη. Αν L κλάδος του λογαρίθμου και $L(z_1) = L(z_2)$ από τον ορισμό προκύπτει $z_1 = z_2$. Θέτουμε $Z = L(z)$ $Z_0 = L(z_0)$ οπότε

$$\frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\frac{e^Z - e^{Z_0}}{Z - Z_0}}$$

Για $z \rightarrow z_0$ από την συνέχεια της L προκύπτει $Z \rightarrow Z_0$, οπότε λαμβάνοντας τα όρια στην προηγούμενη ισότητα παίρνουμε

$$L'(z_0) = \frac{1}{e^{L(z_0)}} = \frac{1}{z_0} \text{ για τυχόν } z_0.$$

Σχετικά με το δεύτερο σκέλος αν πάρουμε δύο κλάδους L_1, L_2 η διαφορά τους έχει μηδενική παράγωγο στον τόπο οπότε είναι σταθερή σε αυτόν. Από την σχέση $e^{L_1(z)} = e^{L_2(z)} = z$ προκύπτει $e^{L_1 - L_2} = 1$ και επειδή η διαφορά των κλάδων είναι σταθερή παίρνουμε το ζητούμενο.

Ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου είναι προφανώς ένας κλάδος που αντιστοιχεί στον τόπο $C_{-\pi} = C - \{x \in R : x \leq 0\}$.

(Επειδή μοιάζουν οι ορολογίες συνιστούμε προσοχή στη διαφορά ανάμεσα στη συνάρτηση κύριος λογάριθμος και κύριος κλάδος του λογαρίθμου. Η δεύτερη συνάρτηση είναι αναλυτικός περιορισμός της πρώτης).

Κλάδο του λογαρίθμου με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε από οποιαδήποτε συνάρτηση $\text{Log}_a z$ αν την περιορίσουμε στον τόπο C_a που θυμίζουμε ότι

ορίστηκε αφαιρώντας από το επίπεδο την ημιευθεία με αρχή το μηδέν και σημεία τα $arg z = a$.

Παρατήρηση. Στο ερώτημα ποιοί δέχονται την φιλοξενία κλάδων λογαρίθμων δεν είμαστε ακόμη ώριμοι για μια πλήρη απάντηση, με τα παραπάνω όμως δώσαμε μια θετική απάντηση για τους τόπους που δεν τέμνουν κάποια ημιευθεία με αρχή το μηδέν.

□

3.2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

Ανιχνεύοντας έναν ορισμό για την έκφραση a^b με τις ιδέες της πραγματικής ανάλυσης αυθόρμητα μας έρχεται στο νου η ισότητα $a^b = e^{b \log a}$ που στα νέα δεδομένα έχει νόημα, όχι όμως σαν αριθμός αλλά σαν σύνολο.

Με άλλα λόγια ορίζουμε

$$a^b = \{e^{b \log a} = e^{b(\log|a| + i \operatorname{Arg} a + 2k\pi i)}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Το παραπάνω σύνολο μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμο. αφήνουμε στον αναγνώστη τα παρακάτω

Αν $b = n$ ακέραιος τότε έχουμε μονοσύνολο με την γνωστή μας τιμή. (Στην περίπτωση αυτή θα κάνουμε εξαίρεση και κρατώντας τον παλιό ορισμό με την έκφραση θα εννοούμε την τιμή και όχι το μονοσύνολο.) Αν $b = \frac{m}{n}$ ρητός σε ανάγωγη μορφή τότε το σύνολο εξαντλείται σε n διαδοχικά στοιχεία του παραπάνω τύπου και μπορούμε να γράφουμε $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ όπου το $a^{\frac{1}{n}}$ ταυτίζεται με το σύνολο των n -στών ριζών του a που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Στην έννοια της δύναμης που ορίσαμε δεν ισχύουν με την συνολοθεωρητική έννοια που έχουν νόημα οι σχέσεις $z^{a+b} = z^a z^b$, $(z^a)^b = z^{ab}$.

πχ

$$(-1)^{1/2} \cdot (-1)^{1/2} = \{\pm i\} \cdot \{\pm i\} = \{+1, -1\} \neq \{-1\}, (i^2)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \{i, -i\}.$$

Κύρια τιμή της δύναμης ή κύρια δύναμη a^b ορίζουμε την τιμή που αντιστοιχεί στον τύπο στον κύριο λογάριθμο ($k = 0$) και θα συμβολίζουμε

$$a_{(0)}^b = e^{b \operatorname{Log} a}$$

Σε αντιστοιχία με τους κλάδους του λογαρίθμου ορίζονται φυσιολογικά οι κλάδοι της z^b , δηλαδή μια συνάρτηση f είναι κλάδος της δύναμης z^b αν υπάρχει

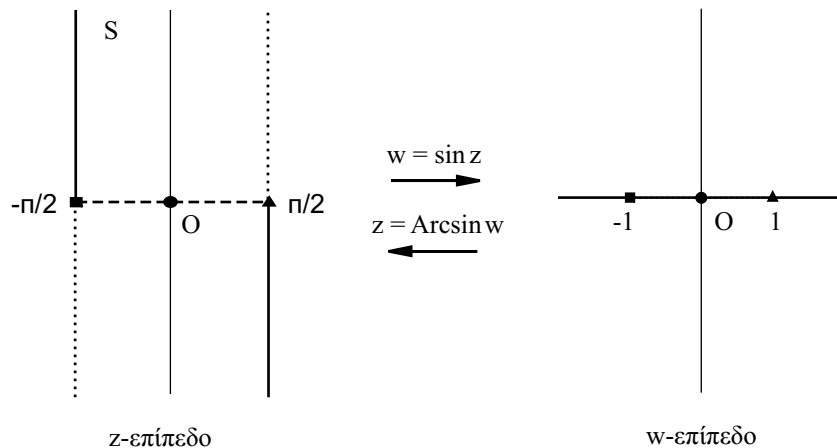
κλάδος του λογαρίθμου L τέτοιος ώστε $f = e^{bL}$ και θα συμβολίζουμε με z_L^a . Κύριος κλάδος της δύναμης z^a αυτός που αντιστοιχεί στον κύριο κλάδο του λογαρίθμου και αποτελεί περιορισμό τις κύριες δύναμης στον τόπο $C_{-\pi}$ γιαυτό χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό προτάσσοντας την λέξη κλάδος για να μην δημιουργηθούν συγχύσεις. κλάδος $z_{(0)}^a$).

Θεώρημα 3.2.2. Για οποιοδήποτε κλάδο z_L^a ισχύει $(z_L^a)' = az_L^{a-1}$.

Απόδειξη. $(z_L^a)' = (e^{aL(z)})' = (e^{aL(z)})\frac{1}{z} = a(e^{aL(z)})\frac{1}{e^{L(z)}} = a(e^{(a-1)L(z)}) = az_L^{a-1}$ $\square$

Παρατήρηση 3.2.1. Ο κύριος κλάδος της z^a αποτελεί αναλυτική επέκταση της πραγματικής συνάρτησης x^a για $x > 0$ και a πραγματική σταθερά.

3.2.4 Ακέραια επέκταση των σφναρτήσεων $\sin x$ και $\cos x$.



Σχήμα 3.2:

Από την σχέση

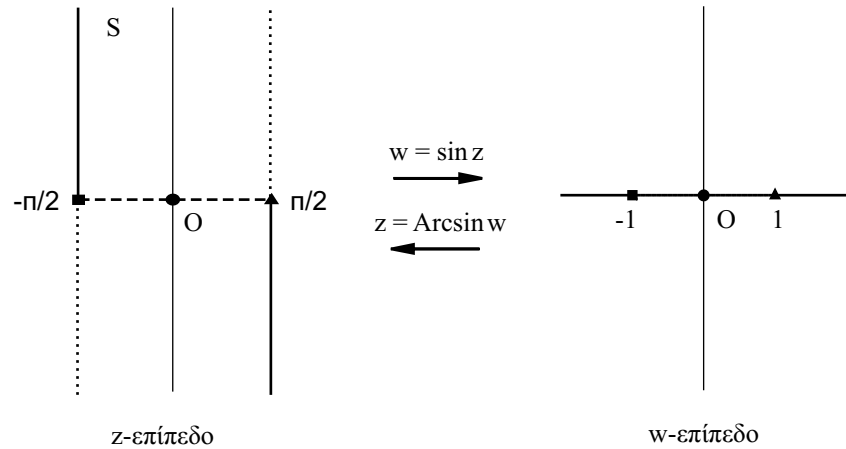
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

αντικαθιστώντας το x με z προκύπτει αυτόματα μια ακέραια αναλυτική επέκταση των παραπάνω τριγωνομετρικών συναρτήσεων που την υιοθετούμε και σαν ορισμό, δηλαδή ορίζουμε

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Με απλούς υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι επεκτείνονται οι τριγωνομετρικοί τύποι του αθροίσματος, της διαφοράς και εξακολουθεί να ισχύει. Επισημαίνουμε όμως το γεγονός ότι οι επεκτεταμένες συναρτήσεις δεν είναι φραγμένες, το σύνολο τιμών τους είναι όλο το $\mathbb{C}$ και μάλιστα κάθε τιμή επαναλαμβάνεται άπειρες φορές αριθμήσιμου πλήθους.

Πράγματι αν $w \in \mathbb{C}$ η εξίσωση $\cos z = w$ αν θέσουμε $Z = e^{iz}$ γίνεται $Z^2 + 2wZ + 1 = 0$ και δίνει δύο μη μηδενικές λύσεις Z_1, Z_2 . Από την σχέση $Z_1 = e^{iz}$ προκύπτουν οι λύσεις οι λύσεις $z_{1,k} = -i \log |Z_1| + \text{Arg} Z_1 + 2k\pi$, k ακέραιος. Ομοίως δουλεύουμε για την Z_2 και στη συνέχεια για το ημίτονο.



Σχήμα 3.3:

Οι αναλυτικές επεκτάσεις των υπολοίπων τριγωνομετρικών συναρτήσεων που αριθμών προκύπτουν από το ημίτονο και συνημίτονο με την βοήθεια των γνωστών τύπων.

Μια γενική κατηγορία πραγματικών συναρτήσεων που η υψηλή αξία τους έχει ήδη αναδειχθεί στα μαθήματα της πραγματικής ανάλυσης είναι αυτές που

έχουν την μορφή δυναμοσειράς. Πολλές άλλωστε από αυτές που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα μπορούν να πάρουν αυτή τη μορφή. Ως γνωστό έχουν κάθε τάξης παράγωγο στο ανοικτό διάστημα ορισμού τους. Με βάση αυτά τα δεδομένα το ερώτημα αν επεκτείνονται αναλυτικά και κυρίως αν συνοδεύονται από τις πολύ καλές τους ιδιότητες όταν επεκταθούν είναι κάτι περισσότερο από εύλογο. Η γενίκευση που ακολουθεί ίσως μπορούσε και να συμπυκνωθεί διότι η πλειοψηφία των προτάσεων προκύπτουν με στοιχειώδεις παρεμβάσεις στην πραγματική περίπτωση.

3.3 Δυναμοσειρές - σειρές Laurent.

3.3.1 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Σε κάθε μιγαδική ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ αντιστοιχούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_0 = a_0, S_1 = a_0 + a_1, S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

που την ονομάζουμε σειρά της ακολουθίας και την συμβολίζουμε με

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ή } a_0 + a_1 + \dots$$

Αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων δηλαδή υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a$ τότε θα λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο a . Στην περίπτωση της συγκλίνουσας σειράς έχει ιστορικά επικρατήσει το όριο να συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο όπως η σειρά δηλαδή να γράφουμε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$. Επειδή το ίδιο σύμβολο χρησιμοποιείται για δύο εντελώς διαφορετικές έννοιες πρέπει να προσέχουμε τον προσδιορισμό που το συνοδεύει.

Με το σύμβολισμό

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ ή } a_k + a_{k+1} + \dots$$

εννοούμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}$.

Τα αθροίσματα και οι διαφορές σειρών ο πολλαπλασιασμός σειράς επί μιγαδικό αριθμό ορίζονται με ενιαίο τρόπο από την σχέση

$$a \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm b \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (aa_n \pm bb_n).$$

Σχετικά με το γινόμενο ορίζουμε

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)$$

όπου

$$c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \text{ και γενικά } c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0.$$

Θα λέμε ότι μιά σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα εάν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Επειδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με την ευκλείδεια μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος είναι προφανές ότι η σειρά είναι συγκλίνουσα εάν και μόνο εάν η ακολουθία S_n των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy, δηλαδή $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |S_n - S_m| = 0$ ή ισοδύναμα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $n_0(\epsilon)$ τέτοιος ώστε

$$|S_n - S_m| = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n < \epsilon \text{ όταν κάθε } n > m > n_0(\epsilon).$$

Αν πάρουμε $m = n-1$ προκύπτει ότι αναγκαία (το τονίζουμε αυτό) συνθήκη για την σύγκλιση σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ είναι να είναι μηδενική η αντίστοιχη ακολουθία ($a_n \rightarrow 0$). Για το γεγονός ότι δεν είναι ικανή θεωρούμε σαν αντιπαράδειγμα την σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία $1/n$.

Πρόταση 3.3.1. 1. Αν μια σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει. (λέμε συγκλίνει και απλά).

2. (Κριτήριο σύγκρισης). Αν για δύο ακολουθίες ισχύει $|a_n| \leq |b_n|$ τελικά (δηλαδή για $n > N$) και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Απόδειξη. 1. Αν $S_n(a)$ και $S_n(|a|)$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ αντίστοιχα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} |S_n(a) - S_m(a)| = 0$$

Συνδυάζοντας την σχέση $|S_n(a) - S_m(a)| \leq |S_n(|a|) - S_m(|a|)|$, την υπόθεση της απόλυτης σύγκλισης και το κριτήριο της ακολουθίας Cauchy που περιγράψαμε προκύπτει το ζητούμενο.

2. Εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο ερώτημα λαμβάνοντας υπόψη την σχέση

$$|S_n(|a|) - S_m(|a|)| \leq |S_n(|b|) - S_m(|b|)|.$$

Υπάρχουν μια σειρά κριτήρια σύγκλισης σειρών που προκύπτουν από την σύγκρισή τους με τις απλές αλλά ιδιαίτερα σημαντικές σειρές τις γεωμετρικές που προκύπτουν σε κάθε συγκεκριμένο z από την ακολουθία γεωμετρική πρόοδο az^n .

Αν για συγκεκριμένο z θεωρήσουμε την σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} az^n, \quad a \neq 0,$$

τότε:

όταν $|z| < 1$ η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $\frac{a}{1-z}$ και όταν $|z| \geq 1$ δεν συγκλίνει. Το δεύτερο σκέλος προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι δεν ισχύει η αναγκαία συνθήκη $z^n \rightarrow 0$.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$S_n = a + az + \dots + az^n = \frac{az^{n+1}}{z-1} - \frac{a}{z-1}$$

Επειδή όταν $|z| < 1$ η ακολουθία z^{n+1} είναι μηδενική έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-z}.$$

□

Για να διατυπώσουμε τα επόμενα κριτήρια σύγκλισης θα χρειαστεί να θέσουμε σε πρώτη ζήτηση την έννοια του ανώτερου ορίου πραγματικής ακολουθίας.

Ο πιό εύχρηστος ορισμός του ανώτερου ορίου μιας πραγματικής ακολουθίας είναι σαν το μέγιστο όριο που μπορεί να προκύψει από υπακολουθία της, του $+\infty$ συμπεριλαμβανομένου. Από την πραγματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι τέτοιο όριο υπάρχει και στην περίπτωση που η ακολουθία είναι άνω φραγμένη αυτό θα είναι ο πραγματικός αριθμός a που καθορίζεται πλήρως από την παρακάτω ιδιότητα. Αν θεωρήσουμε τυχούσα περοχή $(a - r, a + r)$ τότε η σχέση $a_n \in (a - r, a + r)$ ισχύει για άπειρο πλήθος δεικτών n , ενώ η σχέση $a_n \geq r$ ισχύει για πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Απλοποιώντας τον συμβολισμό του ορίου το ανώτερο όριο θα το συμβολίζουμε με $\overline{\lim} a_n$.

Πρόταση 3.3.2. Αν $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ μιγαδική σειρά τότε:

Αν $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Αν $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ τότε η σειρά δεν συγκλίνει.

Απόδειξη. Από την ιδιότητα του ανωτέρου ορίου που περιγράψαμε προκύπτει ότι μπορούμε να βρούμε αριθμό ρ ανάμεσα σε αυτό και την μονάδα ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho$ ή $|a_n| < |\rho|^n$ τελικά για όλους τους δείκτες, Στην περίπτωση αυτή η σειρά μας κυριαρχείται απόλυτα από την συγκλίνουσα γεωμετρική, οπότε με βάση το κριτήριο σύγκρισης θα συγκλίνει απόλυτα.

Στην περίπτωση που οι όροι της σειράς είναι τελικά μη μηδενικοί και το όριο $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ υπάρχει είναι γνωστό από την πραγματική ανάλυση (το υποδείχνουμε και σαν άσκηση) ότι υπάρχει και το $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Με την παραπάνω προϋπόθεση μπορούμε έχουμε μια εναλλακτική εκδοχή του προηγούμενου κριτηρίου που συναντιέται στην βιβλιογραφία με την ονομασία κριτήριο του λόγου. $\square$

Ορισμός 3.3.1. Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία συναρτησεων f_n ορισμένων σε σύνολο A και $z \in A$ θα λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση f όταν για κάθε $z \in A$ η αντίστοιχη ακολουθία των μιγαδικών αριθμών $f_n(z)$ συγκλίνει στο $f(z)$ ή ισοδύναμα, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $z \in A$ υπάρχει δείκτης $n_0(\varepsilon, z)$ τέτοιος ώστε

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ όταν } n > n_0(\varepsilon, z).$$

Επισημαίνουμε την προσοχή σας στο γεγονός ότι ο δείκτης εξαρτάται και από το z στην σημειακή σύγκλιση. Αυτό σημαίνει ότι η προσέγγιση ϵ μπορεί να μην επιτυγχάνεται ταυτόχρονα για όλα τα z . πχ μπορεί για κάποιο z_1 να χρειαζόμαστε 50 όρους για κάποιο z_2 110 όρους και για κάποιο z_n γενικά $P(z_n)$ όρους της ακολουθίας με $P(z_n) \rightarrow +\infty$.

Στην πολύ καλή περίπτωση που όλες η προσεγγίσεις επιτυγχάνονται ταυτόχρονα, δηλαδή στον προηγούμενο ορισμό ο δείκτης είναι $n_0(\epsilon)$ (δεν εξαρτάται από το z) έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ορισμός 3.3.2. Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία συναρτησεων f_n ορισμένων σε σύνολο A θα λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση f όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $n_0(\epsilon)$ (ανεξάρτητος του z) τέτοιος ώστε $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ όταν $n > n_0(\epsilon)$.

Ο παραπάνω ορισμός ισοδυναμεί με τις παρακάτω προτάσεις

1. Για κάθε $\epsilon > 0$ και $z \in A$ υπάρχει δείκτης $n_0(\epsilon)$ (ανεξάρτητος του z) τέτοιος ώστε $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ όταν $n, m > n_0(\epsilon)$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$.

Πρόταση 3.3.3. Αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα τότε και το όριο είναι συνεχής συνάρτηση.

Τα όσα είπαμε για σύγκλιση ακολουθιών υπάρχουν σε γενικώτερη μορφή για μετρικούς χώρους και ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει τις αποδείξεις.

Με τρόπο ανάλογο με τις σειρές μιγαδικών αριθμών ορίζονται οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Σε κάθε σειρά συναρτήσεων μας ενδιαφέρουν τα παρακάτω σύνολα.

1. το σύνολο των σημείων που η σειρά συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει το όριο της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ (σημειακή σύγκλιση). Εδώ το πρόβλημά μας ανάγεται

σε πρόβλημα σύγκλισης μιγαδικών σειρών, δηλαδή σε κάθε z ξεχωριστά την αντιμετωπίζουμε σαν σειρά μιγαδικών αριθμών.

2. Τα υποσύνολα του προηγούμενου συνόλου μέσα στα οποία η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Εφαρμόζοντας την δεύτερη πρόταση που αναφέραμε σε ακολουθίες συναρτήσεων ή στις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$ προκύπτει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 3.3.4. Μια σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A εάν και μόνο εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $z \in A$ υπάρχει δείκτης $n_0(\varepsilon)$ (ανεξάρτητος του z) τέτοιος ώστε

$$|S_n(z) - S_m(z)| = |f_{m+1}(z) + f_{m+2}(z) + \dots + f_n(z)| < \varepsilon$$

όταν $n > n_0(\varepsilon)$ για κάθε $z \in A$.

Στην περίπτωση που μια σειρά μιγαδικών συναρτήσεων κυριαρχείται απόλυτα από μία συγκλίνουσα σειρά μιγαδικών αριθμών, τότε έχουμε απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση. Πιό συγκεκριμένα

Πρόταση 3.3.5. (M-test).

Αν για μια ακολουθία συναρτήσεων ισχύει $|f_n(z)| \leq M_n$ για κάθε $z \in A$ και $n > N$ όπου η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο A .

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον συνδυασμό της ανισότητας,

$$\begin{aligned} f_{m+1}(z) + f_{m+2}(z) + \dots + f_n(z) &\leq |f_{m+1}(z)| + |f_{m+2}(z)| + \dots + |f_n(z)| \\ &\leq M_{m+1} + M_{m+2} + \dots + M_n \end{aligned}$$

με το κριτήριο Cauchy για την σύγκλιση σειρών.

3.3.2 Δυναμοσειρές

Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ τότε οι σειρές συναρτήσεων την μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ονομάζονται δυναμοσειρές με κέντρο z_0 .

Αν για κάθε συγκεκριμένο z εφαρμόσουμε τα κριτήρια της n -στης ρίζας και του λόγου στην ακολουθία $a_n(z - z_0)^n$ παίρνουμε άμεσα τα παρακάτω.

Πρόταση 3.3.6. Αν για μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$|z - z_0| \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$$

τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα και αν

$$|z - z_0| \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$$

τότε η σειρά δεν συγκλίνει.

Στην περίπτωση που $a_n \neq 0$ τελικά για όλους τους δείκτες και υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ μπορούμε την προηγούμενη ποσότητα να την αντικαταστήσουμε με

$$|z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Με το σύμβολο $*\frac{1}{x}$ θα συμβολίζουμε τα $+\infty, \frac{1}{x}, 0$ για x μηδέν, πραγματικό διάφορο του μηδενός και $+\infty$ αντίστοιχα.

Αξιοποιώντας την προηγούμενη πρόταση καταλήγουμε στο παρακάτω σημαντικό θεώρημα για δυναμοσειρές.

Θεώρημα 3.3.1. Αν $R = *\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$ για την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο σύνολο $|z - z_0| < R$ και δεν συγκλίνει (ούτε απλά) στο σύνολο $|z - z_0| > R$.
2. Αν $r < R$ η απόλυτη και η απλή σύγκλιση είναι ομοιόμορφες στον κλειστό δίσκο $|z - z_0| \leq r$.

Παρατηρήσεις 3.3.1. 1. Για $R = 0$ η σειρά συγκλίνει αποκλειστικά μόνο στο σημείο $z = z_0$ και έχει όριο το a_0 . Για $R = +\infty$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα σε όλο το $\mathbb{C}$. Σχετικά με τον κύκλο $|z - z_0| = R$ δεν υπάρχει ενιαία απάντηση όσον αφορά την σύγκλιση και αποτελεί το άκρως ενδιαφέρον συνοριακό πρόβλημα που η μελέτη του δεν είναι στους στόχους του βιβλίου και εξετάζεται μόνο σε ειδικές απλές περιπτώσεις.

2. Αν το όριο της ακολουθίας $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ υπάρχει ή απειρίζεται τότε ισούται με R .

Απόδειξη. Το πρώτο σκέλος προκύπτει άμεσα από τις προηγούμενες αντιστοιχίες προτάσεις για σειρές.

Για το δεύτερο παρατηρούμε ότι για $z = z_0 + r$ ισχύει $|z - z_0| = r < R$ οπότε η πραγματική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ συγκλίνει.

Για $|z - z_0| \leq r$ έχουμε $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$. Εφαρμόζοντας τώρα το κριτήριο σύγκρισης παίρνουμε το ζητούμενο $\square$

Παρατήρηση 3.3.1. Στο δεύτερο σκέλος του θεωρήματος μπορούσαμε αντί του κλειστού δίσκου ακτίνας r να το αποδείξουμε για οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του δίσκου $|z - z_0| < R$ διότι είναι υποσύνολο καποιου τέτοιου κλειστού δίσκου.

Αν θεωρήσουμε το μονοσύνολο z_0 και το C δίσκους με την ευρεία έννοια κέντρου z_0 και ακτίνας 0 και $+\infty$ αντίστοιχα τα παραπάνω συνοψίζονται στο συμπέρασμα ότι το σύνολο των σημείων που μια σειρά συγκλίνει και επομένως αντιστοιχεί στην συνάρτηση όριο είναι ανάμεσα στον ανοικτό και κλειστό δίσκο κέντρου z_0 και ακτίνας R . Ο ανοικτός δίσκος αποτελεί το μέγιστο ανοικτό σύνολο που η δυναμοσειρά συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα σε όλα τα συμπαγή υποσύνολά του.

Η ακτίνα R του μέγιστου ανοικτού δίσκου που δυναμοσειρά συγκλίνει στο εσωτερικό του ονομάζεται σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Πρόταση 3.3.7. Αν δύο δυναμοσειρές με το ίδιο κέντρο έχουν διαφορετικές ακτίνες σύγκλισης $R_1 < R_2$ τότε η δυναμοσειρά άθροισμά έχει ακτίνα R_1 .

Επειδή εντός του μικρότερου ανοικτού δίσκου συγκλίνουν και οι δύο θα συγκλίνει και το άθροισμα. Αν η μικρή ακτίνα δεν ήταν η ζητούμενη αλλά κάποια μεγαλύτερη θα μπορούσαμε να βρούμε ένα σημείο z με $R_1 < |z| < R_2$ που η δυναμοσειρά άθροισμα να συγκλίνει σε αυτό. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί διότι η μία σειρά συγκλίνει στο σημείο αυτό, η άλλη δεν συγκλίνει και επομένως δεν συγκλίνει το άθροισμα.

Παρατήρηση 3.3.2. Αν οι ακτίνες είναι ίσες δεν ισχύει ανάλογη πρόταση. Σαν παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε δύο αντίθετες δυναμοσειρές.

Από όσα είπαμε προκύπτει η πρώτη μεγάλη ποιοτική διαφορά των δυναμοσειρών από τα πολυώνυμα που είναι η “στενότητα των πρώτων” στα πεδία ορισμού που τα προτιμούν αποκλειστικά συγκεκριμένους δίσκους. Ας μην βιαστούμε να απαντήσουμε αν αυτό είναι μειονέκτημα και ας προχωρήσουμε στο πιο σημαντικό δηλαδή στην μελέτη της αναλυτικότητας τους στον δίσκο που ορίζονται, και εδώ τα νέα είναι ευχάριστα γιατί παραγωγίζονται σαν πολυώνυμα.

Θεώρημα 3.3.2. Θεωρούμε την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ και την αντίστοιχη

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}(z - z_0)^n$$

1. Ο δύο παραπάνω δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης
2. Αν η ακτίνα σύγκλισης δεν είναι μηδενική στον ανοικτό δίσκο σύγκλισης η συνάρτηση όριο (θα την λέμε δυναμοσειρά) είναι αναλυτική και ισχύει

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

Απόδειξη. Σχετικά με το πρώτο σκέλος. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ συμπίπτει με την ακτίνα της $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^n$. (γιατι).

Από το γνωστό όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ προκύπτει

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

από την οποία προκύπτουν οι ισότητες των ακτίνων.

Στο δεύτερο σκέλος, για καθαρά υπολογιστικούς λόγους που δεν επηρεάζουν την ουσία υποθέτουμε ότι $z_0 = 0$.

Αν $r < R$, εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο σκέλος διαπιστώνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^2 r^{n-1}$ συγχλίνει.

Για να μην παρεμβάλουμε ογκώδεις παραστάσεις στο σώμα της απόδειξης διατυπώνουμε έναν ισχυρισμό που αποτελεί και μια καλή λυκειακή άσκηση αφήνοντας την απόδειξή του για το τέλος.

Αν $|z| \leq r$ και $|w_0| \leq r$ τότε

$$\left| \frac{z^n - w_0^n}{z - w_0} - nw_0^{n-1} \right| \leq |z - w_0| \frac{n^2 r^{n-1}}{2}$$

Αν w_0 τυχαίο σημείο στον ανοικτό δίσκο σύγκλισης το προς απόδειξη σχέ-
λος ισοδυναμεί με τη σχέση

$$\lim_{z \rightarrow w_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n - w_0^n}{z - w_0} - nw_0^{n-1} \right) = 0$$

Για z σε κατάλληλη περιοχή του w_0 υπάρχει r τέτοιο ώστε $|z|, |w_0| \leq r < R$,
οπότε

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n - w_0^n}{z - w_0} - nw_0^{n-1} \right) \right| \leq |z - w_0| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^2 r^{n-1}$$

Είναι τώρα φανερό ότι το όριο για $z \rightarrow 0$ μηδενίζεται.

Σχετικά με τον αρχικό ισχυρισμό, καταρχήν έχουμε

$$|z^k - w_0^k| = |z - w_0| |z^{k-1} + w_0 z^{k-2} + \dots + w_0^{k-1}| \leq |z - w_0| k r^{k-1}$$

και

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n - w_0^n}{z - w_0} - nw_0^{n-1} \right| &= |(z^{n-1} - w_0^{n-1}) + w_0(z^{n-2} - w_0^{n-2}) + \dots + w_0^{n-2}(z - w_0)| \leq \\ &|z - w_0| ((n-1)r^{n-1} + (n-2)r^{n-1} + \dots + r^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2} r^{n-1} \end{aligned}$$

□

Παραγωγίζοντας διαδοχικά προκύπτουν τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 3.3.1. Θεωρούμε την δυναμοσειρά, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ και την αντίσ-
τοιχη $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$.

1. Ο δύο παραπάνω δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

2. Αν η ακτίνα σύγκλισης δεν είναι μηδενική, στον ανοικτό δίσκο σύγκλισης η συνάρτηση όριο της πρώτης έχει κάθε τάξης παράγωγο και ισχύει

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

3. Αν $f(z)$ είναι η συνάρτηση όριο της πρώτης δυναμοσειράς τότε ισχύει
- $$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Πόρισμα 3.3.2. Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης και στην περίπτωση που έχουμε ανοικτό δίσκο σύγκλισης η δεύτερη είναι παράγουσα της πρώτης (Η παράγωγος της δεύτερης είναι η πρώτη στον ανοικτό δίσκο).

Παρατήρηση 3.3.3. Για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης στις δυναμοσειρές είτε την υπολογίζουμε απευθείας με το σχετικό θεώρημα, είτε για τυχαίο z που το θεωρούμε σταθερό εφαρμόζουμε τα κριτήρια σύγκλισης για την αντίστοιχη σειρά μιγαδικών αριθμών. Χρήσιμη είναι κάποιες φορές η πρόταση από την πραγματική ανάλυση σύμφωνα με την οποία αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $|a_{n+1}/a_n|$ τότε υπάρχει και της ακολουθίας $\sqrt[n]{|a_n|}$ και ταυτίζονται. Σε κάποιες περιπτώσεις συναντούμε εκφράσεις της μορφής $\sum a_n(z-z_0)^{h(n)}$ όπου $h(n) > n$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Αν εξαντλήσουμε τα όρια της μαθηματικής μας αυστηρότητας η παραπάνω έκφραση δεν έχει συμπεριληφθεί στον ορισμό της δυναμοσειράς που δώσαμε αλλά συμβολίζει την σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία συναρτήσεων $a_n(z-z_0)^{h(n)}$. Ας συνεχίσουμε καλύτερα την συζήτηση με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Θεωρούμε την έκφραση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n2^n}$$

Η παραπάνω έκφραση σαν σειρά συναρτήσεων που προκύπτει από την ακολουθία $f_n(z) = \frac{z^{2n}}{n2^n}$ τυπικά δεν είναι δυναμοσειρά διότι σύμφωνα με τον ορισμό μας ο n -στός όρος της ακολουθίας στις δυναμοσειρές έχει n -στή δύναμη.

Όταν η παραπάνω έκφραση αναφέρεται σαν δυναμοσειρά την εννοούμε κατόπιν συμφωνίας σαν την συνοπτικότερη γραφή της αρχικής δυναμοσειράς με την εγκατάλειψη των όρων που είναι μηδενικοί. Αν δούμε τώρα την παραπάνω έκφραση σαν ακολουθία μερικών αθροισμάτων στις δύο εκδοχές της έχουμε.

Στην πρώτη περίπτωση ως ακολουθία συναρτήσεων

$$S_1 = z^2/3, S_2 = z^2/2 + z^4/8, S_k = \sum_{n=1}^k \frac{z^{2n}}{n2^n}$$

Στην δεύτερη περίπτωση ως δυναμοσειρά έχουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$S_1^* = 0, S_2^* = S_1, S_3^* = S_1, \dots, S_{2n}^* = S_n, S_{2n+1}^* = S_n$$

Διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για δύο διαφορετικές σειρές συναρτήσεων που όμως συγκλίνουν στο ίδιο ακριβώς σύνολο με τον ίδιο τρόπο και στο ίδιο όριο. Στο εύλογο ερώτημα γιατί τότε τόση έμφαση η απάντηση είναι ότι η σύγχυση αυτή δημιουργεί προβλήματα στην ορθή εφαρμογή των θεωρημάτων για την εύρεση τις ακτίνας σύγκλισης γι αυτό συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της. Αν την δούμε αυστηρά σαν δυναμοσειρά δεν μπορούμε να πάρουμε απευθείας την ακτίνα με το όριο της ακολουθίας $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ διότι η δυναμοσειρά έχουμε άπειρο πλήθος μηδενικών συντελεστών. Αν όμως την έκφραση για κάθε συγκεκριμένο z την δούμε σαν την αντίστοιχη σειρά μιγαδικών αριθμών μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου. Πράγματι το μέτρο του λόγου δύο διαδοχικών όρων είναι $\frac{|z|^{2n}}{2(n+1)}$ και το όριο για $n \rightarrow \infty$ είναι $\frac{|z|^2}{2}$. Το παραπάνω όριο

γίνεται μικρότερο του ένα για $|z| < \sqrt{2}$ επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι $\sqrt{2}$.

Ο απευθείας υπολογισμός με το αντίστοιχο θεώρημα για δυναμοσειρές μπορεί να γίνει προσέχοντας ότι η τάξη του όρου καθορίζεται από τον εκθέτη οπότε στην γενική περίπτωση θα έχουμε

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Στο παράδειγμα που αναφερόμαστε έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 2^n} \right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

επομένως η ακτίνα είναι $\sqrt{2}$.

Παράδειγμα 3.3.1. Να υπολογιστούν οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum \frac{n^n}{n!} z^n, \sum \frac{n^n}{n!} z^{n^2}, \sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^6} \frac{1}{n!} z^{n^5}.$$

Για την πρώτη σειρά το $n!$ και η ανυπαρξία μη μηδενικών συντελεστών μας προδιαθέτει για την μελέτη του ορίου της ακολουθίας

$$\frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Το όριο είναι $1/e$ και ισούται με την ακτίνα σύγκλισης.

Για την δεύτερη που δεν εφαρμόζεται η προηγούμενη μέθοδος εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου για τυχαίο $|z|$ και αναζητούμε το σύνολο που δίδει όριο μικρότερο της μονάδας. Ο λόγος δίδεται από την ποσότητα

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1} z^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{n^n z^n}{n!}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^{2n-1}$$

η παραπάνω ακολουθία για $|z| < 1$ έχει όριο μηδέν για $|z| = 1$ έχει όριο $e > 1$ και για $|z| > 1$ το $+\infty$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι ένα και επιπλέον έχουμε και μια απάντηση ότι δεν έχουμε σύγκλιση σε κανένα σημείο του συνόρου.

Για την τρίτη περίπτωση μπορούμε να έχουμε απευθείας απάντηση με την άμεση αλλά προσαρμοσμένη εφαρμογή του τύπου της ακτίνας δηλαδή

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^6}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Συνεχίζουμε με μερικά παραδείγματα υπολογισμών με την χρήση της Γεωμετρικής Σειράς.

Παράδειγμα 3.3.2. Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ και να υπολογιστεί το όριο στο εσωτερικό του δίσκου σύγκλισης για $k = 1, 2, 3$.

Καταρχήν

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = 1$$

Ξρήσιμες σε αυτές τις περιπτώσεις είναι οι σχέσεις

$$n^2 = n(n-1) + n, n^3 = n(n-1)(n-2) + 2n(n-1) + n$$

Για $k = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n-1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^n \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' + 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)'' + z^3 \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της παραγωγίσης δυναμοσειρών στη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ για } |z| < 1$$

η προηγούμενη ποσότητα γράφεται

$$z\left(\frac{1}{1-z}\right)' + 2z^2\left(\frac{1}{1-z}\right)'' + z^3\left(\frac{1}{1-z}\right)'''$$

Όλα τα υπόλοιπα αφήνονται στον αναγνώστη.

Έχουμε ήδη γνωρίσει μια απλή και πολύ σημαντική συνάρτηση την $1/(1-z)$ που αναπτύσσεται στη γεωμετρική σειρά στον δίσκο $|z| < 1$. Αν έχουμε μια τυχούσα αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ σε ανοικτό δίσκο κέντρου z_0 προϋπόθεση για να αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά είναι να έχει κάθε τάξης παράγωγο στο δίσκο. Αν έχει αυτή την ιδιότητα η υποψήφια δυναμοσειρά για την ενδεχόμενη ταύτισή της είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Δίδουμε μερικά παραδείγματα γνωστών συναρτήσεων που αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές.

Παράδειγμα 3.3.3. Να εκφραστεί η συνάρτηση $\frac{1}{(z-a)^k}$, $k = 1, 2, \dots$ σε μορφή δυναμοσειράς με κέντρο $b \neq a$ και ακτίνα $R = |b-a|$.

Καταρχήν

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{b-a} \frac{1}{1 - \frac{z-b}{a-b}}$$

Επειδή

$$\frac{|z-b|}{|a-b|} < 1$$

Από το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε

$$\frac{1}{1 - \frac{z-b}{a-b}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(z-a)^n}$$

οπότε

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

Για το τετράγωνο παραγωγίζουμε κατά μέλη οπότε έχουμε

$$\frac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n(z-b)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}}.$$

(Δυστυχώς το απαράδεκτο λάθος να υψώνονται στη δύναμη οι παράγοντες του αθροίσματος γίνεται σε όχι αμελητέα ποσότητα).

Συνεχίζουμε την παραγωγή για τις επόμενες δυνάμεις. Αφήνεται στον αναγνώστη να βρεί επαγωγικά τον γενικό τύπο.

3.3.3 Οι συναρτήσεις e^z , $\cos z$, $\sin z$ $\text{Log} z$ σαν δυναμοσειρές

Επειδή η e^z έχει κάθε τάξης παράγωγο τον εαυτό της η υποψήφια δυναμοσειρά της με κέντρο το μηδέν χρησιμοποιώντας τον σχετικό τύπο $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!} = \frac{1}{n!}$ γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Για την ακτίνα σύγκλισης έχουμε $R = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$. Αν $E(z)$ η συνάρτηση όριο της δυναμοσειράς παραγωγίζοντας την προκύπτει $E'(z) = E(z)$. Επίσης $E(0) = 1$. Όπως σε προηγούμενη παράγραφο επισημάνσαμε η συνάρτηση με τις δύο προηγούμενες ιδιότητες είναι μοναδική και επομένως θα είναι η $E(z) = e^z$.

(Αν είχαμε προτάξει το κεφάλαιο των δυναμοσειρών ο ορισμός της δύναμης e^z μπορούσε να γίνει μέσω της αντίστοιχης δυναμοσειράς).

Αξιοποιώντας το προηγούμενο ανάπτυγμα της e^z έχουμε

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!} = 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots\end{aligned}$$

Ομοίως για το ημίτονο έχουμε

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots$$

Στον αναγνώστη αφήνονται τα αναπτύγματα με τυχόν κέντρο $z_0 \neq 0$ αξιοποιώντας τις ισότητες

$$\sin z = \sin(z - z_0 + z_0) = \sin(z - z_0) \cos z_0 + \cos(z - z_0) \sin z_0, \cos z = \dots$$

Σχετικά με τον $\text{Log} z$ (Κύριος κλάδος) για το ανάπτυγμά του σε δυναμοσειρά με κέντρο z_0 .

“για να μην εγγίζουμε τον αρνητικό ημιάξονα” είμαστε υποχρεωμένοι να περιοριστούμε στον $D(z_0, |z_0|)$ αν είμαστε στο δεξιό ημιεπίπεδο και $D(z_0, |\text{Im} z_0|)$ σε αντίθετη περίπτωση. Επίσης έχουμε

$(\text{Log} z)' = z^{-1}, (\text{Log} z)'' = (-1)z^{-2}, (\text{Log} z)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}$, η υποψήφια δυναμοσειρά είναι

$$\text{Log} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z_0^{-n}}{n} (z - z_0)^n$$

. Ειδικά για $z_0 = 1$ έχουμε

$$\text{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n$$

στο δίσκο $|z - 1| < 1$

ή

$$\text{Log}(1 - z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

στο δίσκο $|z| < 1$

Τα παραπάνω αναπτύγματα είναι γνωστά στην πραγματική ευθεία.

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $e^z + e^{1/z}$ και μας θέσουν το ερώτημα να το δώσουμε σε μορφή σειράς συναρτήσεων με βάση τα όσα μάθαμε το πιο πιθανό ήταν να δίδαμε

$$e^z + e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}.$$

Από την μορφή του δεύτερου προσθετέου προκύπτει ότι δεν είναι δυναμοσειρά παρά το γεγονός ότι προκύπτει από σύνθεση δυναμοσειράς με την συνάρτηση $1/z$. αναδελιχνεται λοιπόν η ανάγκη να μελετήσουμε σειρές της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

που ονομάζονται σειρές Laurent.

3.4 Σειρές Laurent

Σε κάθε μιγαδική 'άκολουθία' της μορφής $(z_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ αντιστοιχεί η διπλή ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_{m,n} = z_{-m} + z_{-m+1} + \dots + z_0 + \dots + z_n$ που ορίζεται σαν διπλή σειρά της αντίστοιχης ακολουθίας και συμβολίζεται με $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$. Η διπλή σειρά είναι συγκλίνουσα αν υπάρχει το $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{m,n}$ δηλαδή υπάρχει μιγαδικός αριθμός z τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n(\varepsilon)$ ώστε $|S_{m,n} - z| < \varepsilon$ για κάθε $m, n > n(\varepsilon)$. Το πιο σημαντικό σημείο όσον αφορά το όριο είναι ότι μια διπλή σειρά συγκλίνει εάν και μόνο εάν συγκλίνουν και οι δύο απλές σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \dots \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} = z_{-1} + z_{-2} + \dots$$

και στην περίπτωση αυτή το όριο είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους ορίων. (Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη). Με αυτό τον τρόπο η μελέτη κάθε διπλής σειράς ανάγεται πλήρως στην μελέτη των δύο απλών σειρών. Με τρόπο ανάλογο προς τις δυναμοσειρές μπορούμε να ορίσουμε τις διπλές σειρές συναρτήσεων της μορφής $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ που θα τις ονομάζουμε σειρές Laurent με κέντρο το z_0 .

Επισημαίνουμε την προσοχή στο γεγονός ότι κάθε σειρά Laurent αναφέρεται σε αυστηρά προσδιορισμένο μοναδικό κέντρο διότι δυστυχώς γίνεται καμιά φορά το σοβαρό λάθος να αθροίζονται σειρές Laurent με διαφορετικά κέντρα και το άθροισμα να θεωρείται εσφαλμένα σειρά Laurent. Το πρόβλημα της εύρεσης των σημείων σύγκλισης μιας σειράς Laurent ανάγεται σύμφωνα με όσα είπαμε στην εύρεση του συνόλου των σημείων z που συγκλίνουν ταυτόχρονα οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Η πρώτη ονομάζεται κύριο μέρος και η δεύτερη που είναι δυναμοσειρά ονομάζεται ομαλό μέρος της σειράς Laurent.

Το κύριο μέρος, αν θέσουμε $Z = (z-z_0)^{-1}$ μετατρέπεται σε δυναμοσειρά που συγκλίνει απόλυτα στο σύνολο

$$|Z| < * \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}}$$

που στην αρχική σειρά ισοδυναμεί με

$$|z-z_0| > r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}}$$

Με βάση το παραπάνω το κύριο μέρος συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του του συνόλου $|z-z_0| > r$ εξωτερικό του κύκλου $C(z_0, r)$ και δεν συγκλίνει στο εσωτερικό. Το ομαλό μέρος είναι δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R = * \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Επειδή στα σημεία σύγκλισης της αρχικής σειράς συγκλίνουν και το ομαλό και το κύριο μέρος θα υπακούουν αναγκαστικά στην σχέση $r \leq |z-z_0| \leq R$ Με βάση τα παραπάνω διαμορφώνεται η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 3.4.1. 1. Αν $r > R$ δεν υπάρχουν σημεία σύγκλισης της σειράς Laurent.

2. Αν $r = R$ ενδεχόμενα σημεία σύγκλισης ευρίσκονται όλα στον κύκλο $C(z_0, r)$.

3. Αν $r < R$ η σειρά Laurent συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του ανοικτού δακτυλίου $\Delta(z_0, r, R)$ και αποκλίνει στο εξωτερικό του.

Επεκτείνεται και στις σειρές Laurent το θεώρημα της κατά μέλη παραγωγισι-
ς που ισχύει για δυναμοσειρές

Θεώρημα 3.4.1. Θεωρούμε την σειρά Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ και την
αντίστοιχη $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$.

1. Ο δύο παραπάνω σειρές έχουν τις ίδιες ακτίνες σύγκλισης
2. Αν $r < R$ το όριο $f(z)$ της αρχικής σειράς έχει κάθε τάξης παράγωγο στον αντίστοιχο ανοικτό δακτύλιο και ισχύει $f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση ο ανοικτός δακτύλιος σύγκλισης αποτελεί την τομή των ανοικτών συνόλων σύγκλισης του ομαλού και του κύριου μέρους. Δουλεύουμε ξεχωριστά για το ομαλό και το κύριο μέρος. Το ομαλό μέρος είναι δυναμοσειρά και ως γνωστό η παράγωγος δυναμοσειρά οποιασδήποτε τάξης διατηρεί την ακτίνα.

Επειδή το κύριο μέρος προκύπτει από σύνθεση της της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n$ με την συνάρτηση $Z = 1/(z - z_0)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον σχετικούς κανόνες παραγωγισις δυναμοσειράς και σύνθετης συνάρτησης.

Ανιχνεύοντας για τον εντοπισμό παράγουσας μιας σειράς Laurent ενώ όλα φαίνεται να δουλεύουν καλά, δηλαδή η παράγουσα κάθε όρου $a_n(z - z_0)^n$ είναι $a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$ σκοντάφτουμε στο $n = -1$, δηλαδή στον όρο $a_{-1}/(z - z_0)$ και στις ανωμαλίες που προκύπτουν με τους ορισμούς των λογαρίθμων.

Αυτή η διαφοροποίηση από τις δυναμοσειρές δεν είναι μια απλή λεπτομέρεια, αλλά όπως θα αποδειχθεί συνιστά μια τεράστια ποιοτική διαφορά που θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα. Προς το παρόν μπορούμε να ξεφύγουμε λίγο αν περιορίσουμε σε περιπτώσεις που $a_{-1} = 0$ ή αν από την αρχική σειρά αφαιρέσουμε τον όρο τάξης -1 οπότε έχουμε την παρακάτω πρόταση. $\square$

Πρόταση 3.4.2. Αν $\Delta(z_0, r, R)$ ο δακτύλιος σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ τότε ταυτίζεται με τον αντίστοιχο της σειράς } \sum_{n \neq -1} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Αν $f(z), F(z)$ τα αντίστοιχα όρια των δύο προηγούμενων σειρών στον δακτύλιο τότε ισχύει $F'(z) = f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0}$.

Όπως στην περίπτωση των δυναμοσειρών και στην περίπτωση των σειρών Laurent τίθεται το ερώτημα αν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις σε δακτύλιο αναπτύσσονται σε σειρά Laurent. Η απάντηση θα είναι θετική αλλά για να την αποδείξουμε θα χρειαστούμε την διαμεσολάβηση της έννοιας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος που θα είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου. Παρόλα αυτά αυτή τη στιγμή έχουμε στα χέρια μας ένα πλούσιο υλικό από συναρτήσεις που μπορούμε με τα εργαλεία που έχουμε αυτή τη στιγμή στη διαθεσή μας να τις αναπτύξουμε. Πρόκειται για συναρτήσεις που προκύπτουν από πράξεις και συνθέσεις των “θεμελιωδών” συναρτήσεων που επεκτείναμε αναλυτικά από την πραγματική ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο.

Το γεγονός ότι μια σειρά Laurent αποτελεί άθροισμα μιας δυναμοσειράς (ομαλό μέρος) και ως μας επιτραπεί η έκφραση μιας μεταλλαγμένης δυναμοσειράς (κύριο μέρος), αναδείχνει τον καθοριστικό ρόλο των αναπτυγμάτων σε δυναμοσειρές στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Ας συνεχίσουμε καλύτερα με μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.4.1. Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η συνάρτηση $1/(z-a)^k$ στους δακτυλίους $\Delta(a, 0, \infty) = \mathbb{C} - \{a\}$ και $\Delta(b, |b-a|, +\infty) = \{z : |z-b| > |z-a|\}$.

Όσον αφορά τον πρώτο δακτύλιο επειδή το κέντρο είναι a , ο τύπος της συνάρτησής μας προσφέρει έτοιμη τη σειρά Laurent $\dots 0 + 0 + (z-a)^{-1} + 0 + 0 + \dots$ (πολλοί φοιτητές την έχουν πατήσει ψάχνοντας για κάτι πιο δύσκολο.) Τα πράγματα δεν είναι τόσο απλοϊκά στο δεύτερο δακτύλιο που θα ακολουθήσουμε

ανάλογη διαδικασία με το αντίστοιχο πρόβλημα σε δυναμοσειρά. Προκειμένου να κατασκευάσουμε λόγο γεωμετρικής σειράς παρατηρούμε ότι $|\frac{a-b}{z-b}| < 1$ οπότε

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-b)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(a-b)}{(z-b)}} = \frac{1}{(z-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}}.$$

Για την ανάπτυξη της δύναμης $1/(z-a)^k$ k φυσικός παραγωγίζουμε το προηγούμενο k φορές όπως στο αντίστοιχο πρόβλημα της δυναμοσειράς. Τα υπόλοιπα αφήνονται στον αναγνώστη.

Λαμβάνοντας υπόψη το παράδειγμα που δώσαμε και το αντίστοιχο στις δυναμοσειρές μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Laurent οιαδήποτε ρητή συνάρτηση που γνωρίζουμε τις ρίζες του παρανομαστή σε οποιοδήποτε δακτύλιο που δεν έχει ρίζες. Δίνουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.4.2. Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent στο δακτύλιο $1 < |z-1-i| < \sqrt{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{z^2(1-z)^2}$.

Η συνάρτηση σε σειρά κλασμάτων γράφεται $\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}$.

Για πρακτικούς λόγους και κυρίως για να μην ξεχάσουμε το κέντρο θέτουμε $Z = z - 1 - i$ και μετασχηματίζουμε προσωρινά το πρόβλημα στην εύρεση του αναπτύγματος με κέντρο το μηδέν της αντίστοιχης συνάρτησης στο δακτύλιο $1 < |Z| < \sqrt{2}$.

Σχετικά με την συνάρτηση $\frac{1}{Z+1+i}$, επειδή $|1+i| = \sqrt{2}$ έχουμε $\frac{|Z|}{|1+i|} < 1$ οπότε

$$\frac{1}{Z+1+i} = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{Z(-1)}{1+i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} Z^n$$

ή

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-1-i)^n$$

και μετά την παραγωγή κατά μέλη

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} n(z-1-i)^{n-1}.$$

Για την συνάρτηση $\frac{1}{Z+i}$ επειδή $|\frac{i}{Z}| < 1$ έχουμε

$$\frac{1}{Z+i} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i(-1)}{Z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n Z^{-n-1}$$

ή

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n (z-1-i)^{-n-1}$$

και μετά την παραγωγήιση κατά μέλη

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n (n+1) (z-1-i)^{-n-2}.$$

Η διαχείριση των επί μέρους αποτελεσμάτων για το τελικό ανάπτυγμα αφήνεται στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 3.4.3. Να αναπτυχθεί κατά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(\frac{1}{2}, 0, +\infty)$ η συνάρτηση $\sin^2 z + \sin \frac{1}{2z-1}$

Αν θέσουμε $\sin^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z$ και $Z = z - \frac{1}{2}$

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(Z+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\cos Z \cos 1 - \sin Z \sin 1) =$$

$$1/2 + \frac{1}{2} \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2} \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - \frac{1}{2})^{2n+1} - \frac{1}{2} \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - \frac{1}{2})^{2n}.$$

Για το υπόλοιπο σκέλος έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2z-1} &= \cos \frac{1}{2Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! 2^{2n+1} Z^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - \frac{1}{2})^{-2n-1} \end{aligned}$$

Η σύνθεση του τελικού αναπτύγματος αφήνεται στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 3.4.4. Να αναπτυχθεί κατά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(\frac{1}{3}, 0, +\infty)$ η συνάρτηση $z^2 e^{\frac{1}{(3z-1)^3}}$.

Θέτουμε $z - \frac{1}{3} = Z$ οπότε η παράστασή γίνεται

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9} + Z^2 + \frac{2}{3}Z\right)e^{\frac{1}{27Z}} &= \left(\frac{1}{9} + Z^2 + \frac{2}{3}Z\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{27^n n! Z^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9 \cdot 27^n n! Z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{27^n n! Z^{n-2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3 \cdot 27^n n! Z^{n-1}}. \end{aligned}$$

Για $Z = z - \frac{1}{3}$ παίρνουμε την ζητούμενη σειρά.

Κεφάλαιο 4

Μιγαδική ολοκλήρωση

4.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και παράγουσα

Επειδή στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει ενιαία πρακτική για τον ορισμό της καμπύλης (ακόμη και στο ίδιο βιβλίο μερικές φορές χρησιμοποιούνται διαφορετικές εκδοχές) θεωρώ αναγκαία μια συζήτηση που θα κάνει σαφή και λειτουργική την συμφωνία που θα κάνουμε.

Η αυθόρμητη εκδοχή για την έννοια της καμπύλης είναι η γνήσια γεωμετρική δηλαδή δηλαδή μια γραμμή στο επίπεδο ή στο χώρο. Υπάρχουν άλλες δύο εκδοχές που αποτελούν μείγμα γεωμετρίας και φυσικής κίνησης στις οποίες η καμπύλη αντιστοιχεί στο δρομολόγιο ενός κινητού επάνω σε μια συγκεκριμένη γραμμή (δρόμο).

Η πρώτη εκδοχή της έννοιας δρομολόγιο δεν λαμβάνει υπόψη τους ακριβείς χρόνους που πραγματοποιείται αλλά περιγράφει την ακριβή διαδοχή των σημείων στην συνεχή εξέλιξή του.

Η δεύτερη πιο σφιχτή εκδοχή αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο αυστηρά προσδιορισμένο στο χρόνο δρομολόγιο, δηλαδή που είναι επιπλέον γνωστά η χρονική στιγμή του σημείου αναχώρησης και τέλους και το ακριβές σημείο που το κινητό βρίσκεται σε κάθε ενδιαμέση στιγμή.

Την τελευταία την εκδοχή εμείς θα υιοθετήσουμε που αυστηρή μαθηματική γλώσσα σημαίνει ότι ορίζουμε σαν καμπύλη κάθε συνάρτηση $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχή στο πεδίο ορισμού της.

Σε ορολογία φυσικής κίνησης η καμπύλη περιγράφει το "ιδανικά προσδιορισ-

μένο” δρομολόγιο που η εκκίνηση γίνεται την χρονική στιγμή a από το σημείο $\gamma(a)$ ο τερματισμός την χρονική στιγμή b στο σημείο $\gamma(b)$ και γενικά τη χρονική στιγμή t το κινητό βρίσκεται στη θέση $\gamma(t)$. Η γραμμή (δρόμος) του δρομολογίου είναι το σύνολο τιμών της καμπύλης $\gamma[a, b]$. Παρά το γεγονός ότι οι όροι δρομολόγιο -δρόμος είναι κατά την γνώμη μου αρκετά δόκιμοι, θα διακόψουμε εδώ το φλερτάρισμα μαζί τους διότι αν προστεθούν στην ορολογία που υπάρχει στη βιβλιογραφία μάλλον σύγχυση θα προκαλούσαν. Για το σύνολο τιμών $\gamma[a, b]$ (που παρά την πίεση του αυθόρμητου δεν υιοθετήσαμε σαν καμπύλη) θα χρησιμοποιούμε τον όρο εικόνα της καμπύλης ή ίχνος της καμπύλης και θα το συμβολίζουμε με γ^* .

Με αυτά τα δεδομένα μια μιγαδική καμπύλη δεν μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο διότι μας χρειάζονται δύο διαστάσεις για το ίχνος της και μία για την μεταβλητή t του πεδίου ορισμού της. Επειδή πρακτικά δεν είναι εφικτή μια τέτοια παράσταση συνήθως περιγράφουμε την καμπύλη με το ίχνος της στο επίπεδο συνοδευόμενο με περιγραφή των συμπληρωματικών στοιχείων που απαιτούνται και τα οποία δεν πρέπει να υποτιμούμε.

Η εκδοχή του “δρομολογίου με την γενική έννοια” που δεν υιοθετήσαμε σαν βάση για τον ορισμό της καμπύλης μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιαυτό θα την εξετάσουμε με μεγαλύτερη αυστηρότητα.

Αν έχουμε δύο “τέλεια δρομολόγια” που είναι ταυτόσημα όσον αφορά το “ταξίδι” με την μόνη διαφορά ότι εξελίσσονται σε διαφορετικούς χρόνους θα θεωρούνται ισοδύναμα. Τα παραπάνω περιγράφονται με τον παρακάτω αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 4.1.1. Αν γ_1, γ_2 δύο καμπύλες ορισμένες στα διαστήματα $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ θα λέμε ότι η καμπύλη γ_1 είναι ισοδύναμη της γ_2 ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) αν υπάρχει συνεχής γνησίως αύξουσα πραγματική συνάρτηση με $\phi[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$ τέτοια ώστε $\gamma_2(\phi(t)) = \gamma_1(t)$ για κάθε $t \in [a_1, b_1]$.

Αφήνεται στον αναγνώστη να αποδείξει ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή ισχύουν

$$\gamma \sim \gamma, \text{ 'Αν } \gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ τότε } \gamma_2 \sim \gamma_1$$

$$\text{'Αν } \gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ και } \gamma_2 \sim \gamma_3 \text{ τότε } \gamma_1 \sim \gamma_3.$$

Σε κάθε καμπύλη $\gamma(t), t \in [a, b]$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την καμπύλη που περιγράφει “το ταξίδι της επιστροφής στο ίδιο χρονικό διάστημα” δηλαδή $\gamma_1(t) = \gamma(a + b - t), t \in [a, b]$ που θα αποκαλείται και αντίθετη της γ (θα

την συμβολίζουμε με $-\ast\gamma$) για να αποφύγουμε την σύγχυση με την συνάρτηση $-\gamma(t)$. Το ίχνος κάθε καμπύλης είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο σαν εικόνα συμπαγούς και συνεκτικού συνόλου μέσω συνεχούς συναρτήσεως.

Το πρώτο 'ράπισμα' που δέχεται η προσομοίωση του ορισμού της καμπύλης με δρομολόγιο μας το δίδει η έννοια του μήκους γιατί προκύπτουν διαδρομές άπειρου μήκους. Ας ανασύρουμε καλύτερα τον ορισμό του μήκους.

Αν $\delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$, $\mu(\gamma, \delta) = \sum_{k=0}^n |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|$ το μήκος της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής και $\mu(\gamma) = \sup \mu(\gamma, \delta)$ για όλες τις δυνατές διαμερίσεις του $[a, b]$, στην περίπτωση που $\mu(\gamma) < \infty$ θα λέμε ότι η καμπύλη είναι καμπύλη με μήκος ή ευθυγραμμίσιμη. Στην παραπάνω περίπτωση η τιμή $\mu(\gamma)$ ορίζεται σαν μήκος της καμπύλης γ .

Η επόμενη πιο σημαντική έννοια που πρέπει ορίσουμε είναι η έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ή ολοκληρώματος συνάρτησης υπεράνω μιας καμπύλης γ . Ο αυστηρός ορισμός επιτυγχάνεται με μια απλή παρέμβαση στον γνωστό ορισμό του ολοκληρώματος Riemann υπεράνω κλειστού διαστήματος αντικαθιστώντας τα $t_k - t_{k-1}$ με $\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})$.

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε f μιγαδική συνάρτηση ορισμένη επάνω στο ίχνος $\gamma[a, b]$ μιας καμπύλης γ , $\delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ και $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n\}$ επιλογή σημείων τέτοια ώστε $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ και

$$S(f, \gamma, \delta, T) = \sum (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))f(\gamma(\tau_k))$$

Αν υπάρχει το $\lim S(f, \gamma, \delta, T)$ όταν η λεπτότητα $\lambda(\delta)$ της διαμέρισης τείνει στο μηδέν και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του ενδιάμεσου συνόλου T η τιμή του ορίζεται σαν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f υπεράνω της γ και συμβολίζεται με $\int_\gamma f(z)dz$ ή $\int_\gamma f(z)d\gamma$.

Σε ακολουθιακή γλώσσα ισοδύναμη πρόταση είναι ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός που θα συμβολίζουμε με $\int_\gamma f(z)dz$ τέτοιος ώστε κάθε ακολουθία $S(f, \gamma, \delta_n, T_n)$ με $\lim \lambda(\delta_n) = 0$ έχει όριο τον παραπάνω μιγαδικό αριθμό. Αν στα αθροίσματα αντικαταστήσουμε τα $\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})$ με $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$ με την ίδια ακριβώς διαδικασία ορίζουμε το λεγόμενο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους υπεράνω της καμπύλης που συμβολίζεται με $\int_\gamma f(z)|dz|$ Παρά την ομοιότητα στη διαδικασία της γενίκευσης υπάρχει μεγάλη ποιοτική διαφορά με τα πραγματικά

ολοκληρώματα διότι τα αθροίσματα αποτελούνται από γινόμενα μιγαδικών αριθμών οπότε υπεισέρχονται και οι στροφές. Περισσότερα γιαυτό στη συνέχεια. Τα πράγματα όμως απλοποιούνται όταν η καμπύλη είναι διαφορίσιμη ή κατά τμήματα διαφορίσιμη γιατί αναδειχνεται μια απλή σχέση ανάμεσα στα επικαμπύλια ολοκληρώματα και στα γνωστά μας πραγματικά ολοκληρώματα. Πιο συγκεκριμένα μιά καμπύλη γ θα λέγεται διαφορίσιμη αν υπάρχει η παράγωγος γ' και είναι συνεχής και κατά τμήματα διαφορίσιμη αν υπάρχει διαμέριση του πεδίου ορισμού τέτοια ώστε ο περιορισμός της καμπύλης σε κάθε κλειστό υποδιάστημα της διαμέρισης να είναι διαφορίσιμη καμπύλη.

Πρόταση 4.1.1. Αν γ τμηματικά διαφορίσιμη καμπύλη και f μιγαδική συνάρτηση συνεχής επάνω στο ίχνος της $\gamma[a, b]$ τότε

1. Η καμπύλη είναι ευθυγραμμίσιμη και η τιμή του μήκους της είναι $\mu(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$
2. Υπάρχει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπεράνω της γ και ισχύουν

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt$$

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Τα παραπάνω έχουν γίνει αντικείμενο εξέτασης στην πραγματική ανάλυση και η απόδειξή τους ξεφεύγει από τους στόχους του εγχειρήματος. Επειδή μάλιστα θα περιοριστούμε σε κατά τμήματα διαφορίσιμες καμπύλες μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για τον ορισμό του μήκους και του ολοκληρώματος την παρακάτω πρόταση. Σχετικά με την διαχείριση του θέματος αυτού επιλέξαμε την εξής ενδιάμεση τακτική. Αρκετά θεωρήματα και προτάσεις θα τα διατυπώνουμε στην γενικότερη μορφή καμπύλων που ισχύουν αλλά θα τα αποδεικνύουμε για διαφορίσιμες για να εξασφαλίσουμε πληρέστερη πληροφόρηση του αναγνώστη και ίσως κίνητρο στον πιο απαιτητικό να αναζητήσει την γενίκευση. Σχετικά με την αλλαγή μεταβλητής ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.2. Αν γ_1, γ_2 ισοδύναμες ευθυγραμμίσιμες καμπύλες τότε η $f(z)$ είναι συνάρτηση ολοκληρώσιμη υπεράνω της μίας εάν και μόνο εάν τότε είναι ολοκληρώσιμη υπεράνω της άλλης και στην περίπτωση αυτή τα ολοκληρώματα είναι ίσια.

Από τον ορισμό της ισοδυναμίας έχουμε $\gamma_2(t) = \gamma_1(\phi(t))$ οπότε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma_1(x))\gamma_1'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\gamma_1(\phi(t))\gamma_1'(\phi(t))\phi'(t)dt = \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_{\gamma_2} f(z)dz \end{aligned}$$

Ορισμός 4.1.2. Θα λέμε ότι μια πεπερασμένη ακολουθία καμπύλων είναι διαδοχική αν το τέλος κάθε προηγούμενης συμπίπτει με την αρχή της επόμενης.

Ορισμός 4.1.3. Θεωρούμε ένα ζεύγος διαδοχικών καμπύλων γ_1, γ_2 ορισμένες στα διαστήματα $[a_1, b_1]$ και $[a_2, b_2]$ αντίστοιχα. Ορίζουμε με $\gamma_1 +^* \gamma_2$ την καμπύλη γ που ορίζεται από την σχέση $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ για $t \in [a_1, b_1]$ και $\gamma(t) = \gamma_2(t + a_2 - b_1)$ για $t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]$.

(Σε γλώσσα φυσικής κίνησης με την παραπάνω πράξη μεταθέσαμε χρονικά το δεύτερο δρομολόγιο ώστε να έχει ανταπόκριση ακριβώς την στιγμή και στο σημείο που τελειώνει το πρώτο συνενώνοντάς τα έτσι σε ένα ενιαίο). Η παραπάνω πράξη διαδοχικών καμπύλων συναντιέται στη βιβλιογραφία σαν άθροισμα καμπύλων. Για να αποφευχθούν συγχύσεις με την πρόσθεση συναρτήσεων χρησιμοποιούμε για την πράξη το σύμβολο $+^*$.

Αν έχουμε n -άδα διαδοχικών καμπύλων μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμά τους προσθέτοντας στο άθροισμα των δύο πρώτων την τρίτη στο αποτέλεσμα την επόμενη έως ότου τις εξαντλήσουμε όλες.

Αφήνεται στον αναγνώστη η απόδειξη της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.1.3. Αν μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι ολοκληρώσιμη υπεράνω διαδοχικών καμπύλων γ_1, γ_2 τότε είναι ολοκληρώσιμη υπεράνω των καμπύλων $-^*\gamma_1, \gamma_1 +^* \gamma_2$ και ισχύουν

$$\int_{-^*\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma_1} f(z)dz, \int_{\gamma_1 +^* \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Παρατήρηση 4.1.1. Ξανακοιτάζοντας την σχέση ισοδυναμίας των καμπύλων στο φώς των τελευταίων προτάσεων διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω σχέση δεν είναι τυπική αλλά αποτελεί μια “ίσχυρή ταυτοποίηση” ανάμεσα στα ισοδύναμα ζεύγη καμπύλων. Οι ισοδύναμες καμπύλες προς μια καμπύλη γ (Η κλάση ισοδυναμίας $[\gamma]$) εκτός από τα ίδια άκρα, ίχνη και μήκη δίνουν και το ίδιο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και με αυτή την έννοια για τις ανάγκες της μιγαδικής ανάλυσης συμπεριφέρονται σαν ενιαία καμπύλη. Ορισμένοι συγγραφείς μάλιστα που υιοθετούν για τον ορισμό της καμπύλης την εκδοχή του δρομολογίου με την γενική έννοια ορίζουν την παραπάνω κλάση σαν καμπύλη. Εμείς για την παραπάνω κλάση θα υιοθετήσουμε τον όρο κλάση-καμπύλη γ και ορίζουμε σαν άκρα, μήκος, ίχνος, ολοκλήρωμα υπεράνω της κλάσης τα αντίστοιχα μεγέθη οποιουδήποτε εκπροσώπου της. κλάσης -καμπύλης. το πλεονέκτημα που προκύπτει είναι ότι στα αθροίσματα δεν χρειάζεται να παίρνουμε διαδοχικά πεδία ορισμού.

Επειδή από μια καμπύλη σε μια ισοδύναμη της πηγαίνουμε συνθέτοντάς τη με γνήσιως αύξουσα συνεχή συνάρτηση (αλλαγή μεταβλητής) στην βιβλιογραφία η ισοδυναμία δύο καμπύλων συναντιέται με την έκφραση ότι η μία είναι ισοδύναμη αναπαράμετρηση της άλλης.

Αν ένα υποσύνολο του επιπέδου αποτελεί ίχνος μιας καμπύλης τότε προφανώς αποτελεί ίχνος άπειρου πλήθους καμπύλων. Οι καμπύλες στην βιβλιογραφία συναντιούνται και με την ονομασία παραμέτρηση του ίχνους τους. Εδώ πρέπει να προσέχουμε ότι οι παραμετρήσεις του ίδιου ίχνους δεν είναι πάντα ισοδύναμες .

Ιδιαίτερα χρήσιμες μας είναι η παρακάτω ανισότητες.

Πρόταση 4.1.4. Αν f συνάρτηση ολοκληρώσιμη υπεράνω ευθυγραμμίσιμης καμπύλης γ και $|f(z)| \leq M$ επάνω στο ίχνος της καμπύλης τότε ισχύει

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \int_{\gamma} M |dz| = M \mu(\gamma).$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα αν καταφύγουμε στους γενικούς ορισμούς των ολοκληρωμάτων συσχετίζοντας τα μερικά αθροίσματα που αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση.

Θα δώσουμε όμως και επι πλέον απόδειξη για την περίπτωση διαφορίσιμης καμπύλης.

Αξιοποιώντας την σχέση $|w| = we^{i\theta}$, $\theta = -\text{Arg} w$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \int_a^b e^{i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \leq \\ \int_a^b \text{Re}(e^{i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt &\leq \int_a^b |e^{i\theta} f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Το υπόλοιπο μέρος προκύπτει άμεσα αν συνεχίσουμε αξιοποιώντας την ανισότητα $|f(z)| \leq M$.

Θεμέλιο για τις εργασίες μας αποτελεί η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.5. Αν μια συνάρτηση f έχει παράγουσα F σε ανοικτό σύνολο O και γ ευθυγραμμίσιμη καμπύλη με το ίχνος της στο O τότε ισχύει $\int_{\gamma} f(z) dz = F(B) - F(A)$ όπου $A = \gamma(a)$ η αρχή της καμπύλης και $B = \gamma(b)$ το τέλος της.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ \int_a^b (F(\gamma(t)))' dt &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.1.2. Αν μια συνάρτηση έχει παράγουσα ή αν μπορούμε να την περιορίσουμε σε ένα τόπο κατάλληλο ώστε να έχει σε αυτόν τότε το θέμα της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης της είναι λυμένο επάνω σε καμπύλες του τόπου διότι είναι "ανεξάρτητο του δρόμου" και προσδιορίζεται αυστηρά από τα άκρα του. Προφανώς σε κλειστές καμπύλες επί του τόπου της παράγουσας το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Εδώ ανακύπτουν μια σειρά πολύ ενδιαφέροντα ερωτήματα. Το ένα είναι αν κάθε αναλυτική συνάρτηση έχει μπορεί να περιοριστεί σε κατάλληλους τόπους ώστε σε αυτούς να έχει παράγουσα και το επόμενο αν υπάρχουν τόσο καλοί τόποι και ποιοί είναι αυτοί που όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις σε αυτούς έχουν παράγουσα οπότε απλοποιείται το πρόβλημα της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης

Ας κάνουμε έναν πρώτο έλεγχο στις γνωστές μας συναρτήσεις που συναντήσαμε να δούμε τι θα προκύψει. Καταρχήν οι συναρτήσεις e^z , $\cos z$, $\sin z$ έχουν

για παράγουσες τις $e^z, \sin z, -\cos z$ αντίστοιχα. Αν $L(z)$ κλάδος λογαρίθμου σε αντίστοιχο τόπο DL τότε έχει παράγουσα την συνάρτηση $zL(z) - z, z \in DL$. Οι δυνάμεις $(z-a)^k, k$ ακέραιος διάφορος του -1 έχουν παράγουσα $\frac{(z-a)^{k+1}}{k+1}$. Για τα πολυώνυμα τα πράγματα είναι προφανή και για οποιαδήποτε δυναμοσειρά $\sum a_n(z-z_0)^n$ στο εσωτερικό του κύκλου σύγκλισης έχει παράγουσα την $\sum \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$. Στην απόπειρα να εξετάσουμε το πρόβλημα για πηλίκο πολυωνύμων ακόμη και αν το μετατρέψουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων πάλι ίσως σκοντάψουμε σε συνάρτηση της μορφής $1/(z-z_0)$ με όλες τις αναποδιές του μιγαδικού λογαρίθμου. στην πράξη το παραπάνω εμπόδιο θα αποδειχθεί αναγκαία στάση για να φουλάρουμε σε καύσιμα προκειμένου να συνεχίσουμε. Πρωτου ασχοληθούμε ειδικά με αυτή τη συνάρτηση ας πάρουμε μια ανάσα με μερικά παραδείγματα σε όσα είπαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 4.1.1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

$$\int_{[a,b]} f_k(z)dz, \int_{[a,b]} f_k(z)|dz|, \int_{[-1,1,1+i]} f_k(z)dz, \int_{[-1,1,1+i]} f_k(z)|dz|,$$

όπου $[a, b]$ είναι η καμπύλη ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το a τέλος το $b, [-1, 1, 1+i]$ η αντίστοιχη πολυγωνική καμπύλη, $f_1(z) = |z|^2, f_2(z) = \bar{z}$ και $f_3(z) = x$.

Εφόσον πρόκειται για τμηματικά διαφορίσιμες καμπύλες οι αναγκαίες αντικαταστάσεις για το διάστημα $[a, b]$ είναι

$$\begin{aligned} z &= t(a-b) + b, 0 \leq t \leq 1, \\ dz &= (a-b), |dz| = |a-b|, \\ |z|^2 &= t^2 + |b|^2 + 2t\operatorname{Re}(\bar{b}(b-a)), \\ x &= t\operatorname{Re}(a-b) + \operatorname{Re}b, \\ \bar{z} &= t\overline{(a-b)} + \bar{b}. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις έχουμε,

$$\int_{[a,b]} |z|^2 dz = \int_0^1 (t^2|a-b|^2 + |b|^2 + 2t\operatorname{Re}\bar{b}(a-b))(a-b)dt.$$

Επειδή μια παράγουσα (αόριστο ολοκλήρωμα) ως προς την πραγματική μεταβλητή t είναι η συνάρτηση

$$\left(\frac{1}{3}t^3|a-b|^2 + t|b|^2 + t^2 \operatorname{Re} \bar{b}(a-b)\right)(a-b)$$

έχουμε

$$\int_{[a,b]} |z|^2 dz = \left(\frac{1}{3}|a-b|^2 + |b|^2 + \operatorname{Re} \bar{b}(a-b)\right)(a-b)$$

και ομοίως

$$\int_{[a,b]} |z|^2 |dz| = \left(\frac{1}{3}|a-b|^2 + |b|^2 + \operatorname{Re} \bar{b}(a-b)\right)|(a-b)|.$$

Για $a = -1, b = 1$ τα παραπάνω ολοκληρώματα γίνονται

$$\int_{[-1,1]} |z|^2 dz = -\frac{2}{3} \text{ και } \int_{[-1,1]} |z|^2 |dz| = \frac{2}{3}.$$

Αν θέσουμε $a = 1, b = 1+i$ έχουμε

$$\int_{[1,1+i]} |z|^2 dz = -\frac{4i}{3},$$

$$\int_{[1,1+i]} |z|^2 |dz| = \frac{4}{3} \text{ οπότε}$$

$$\int_{[-1,1,1+i]} |z|^2 dz = \int_{[-1,1]} |z|^2 dz + \int_{[1,1+i]} |z|^2 dz = -2$$

και

$$\int_{[-1,1,1+i]} |z|^2 |dz| = \int_{[-1,1]} |z|^2 |dz| + \int_{[1,1+i]} |z|^2 |dz| = 2$$

Ο αναγνώστης εργαζόμενος ακριβώς με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς που δώσαμε καλείται να υπολογίσει τα υπόλοιπα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 4.1.2. Αν $\gamma(t) = te^{it}, t \in [0, \pi]$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_{\gamma} |z| dz$ και $\int_{\gamma} |z| |dz|$.

Οι αναγκαίες αντικαταστάσεις είναι

$$z = te^{it}, dz = (te^{it})' dt = (tie^{it} + e^{it}) dt, |dz| = \sqrt{t^2 + 1}$$

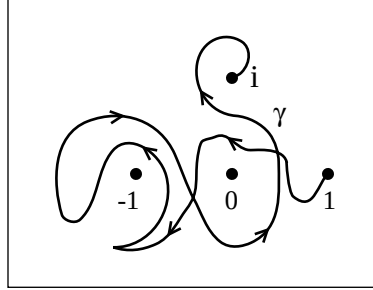
οπότε έχουμε

$$\int_{\gamma} |z| dz = \int_0^{\pi} t(te^{it})' dt = t^2 e^{it} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} te^{it} dt = -\pi^2 + \int_0^{\pi} t(ie^{it})' dt = -\pi^2 + t(ie^{it}) \Big|_0^{\pi} -$$

$$\int_0^{\pi} ie^{it} dt = -\pi^2 - \pi - e^{it} \Big|_0^{\pi} = -\pi^2 - \pi - 2.$$

Το επόμενο ολοκλήρωμα μετά τις αντικαταστάσεις μετασχηματίζεται στο

$$\int_0^\pi t\sqrt{t^2+1}dt = \int_0^\pi \frac{1}{3}((t^2+1)^{\frac{3}{2}})'dt = \frac{1}{3}(\pi^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}.$$



Σχήμα 4.1:

Παράδειγμα 4.1.3. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των συναρτήσεων $f_1(z) = z^{2k-1}e^{z^k}$, k φυσικός αριθμός και $f_2(z) = \sin 2ze^{\sin^2 z}$ υπεράνω των καμπύλων των προηγούμενων παραδειγμάτων και της καμπύλης που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Θα αναζητήσουμε παράγουσα της πρώτης συνάρτησης ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη με αυτή της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

$$z^{2k-1}e^{z^k} = z^k \frac{1}{k}(e^{z^k})' = (z^k \frac{1}{k}(e^{z^k}))' - \frac{1}{k}(e^{z^k})' = (\frac{1}{k}e^{z^k}(z^k - 1))'.$$

Αφου βρήκαμε την παράγουσα το ολοκλήρωμα υπεράνω καμπύλης γ γνωρίζουμε ότι ταυτίζεται με την διαφορά των τιμών της παράγουσας στα άκρα της καμπύλης και στην περίπτωση μας με

$$(\frac{1}{k}e^{\gamma(b)^k}(\gamma(b)^k - 1)) - (\frac{1}{k}e^{\gamma(a)^k}(\gamma(a)^k - 1)).$$

Στην περίπτωση του ολοκληρώματος υπεράνω του ευθυγράμμου τμήματος $[a, b]$ θέτουμε στην παραπάνω ποσότητα $\gamma(a) = a$ και $\gamma(b) = b$. Στην περίπτωση

της πολυγωνικής γραμμής $[-1, 1, 1 + i]$ θέτουμε $\gamma(a) = 1$ $\gamma(b) = b$ και στην περίπτωση της καμπύλης του παραπάνω σχήματος θέτουμε $\gamma(a) = 1$ $\gamma(b) = i$

Σχετικά με την συνάρτηση $(\sin 2z)e^{\sin^2 z}$ αν θέσουμε $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$ έχουμε

$$(\sin 2z)e^{\sin^2 z} = (\sin 2z)e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-\cos 2z}{2}} = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos 2z}{2}}\right)'.$$

Μετά την εύρεση της παράγουσας ακολουθούμε για τους υπολογισμούς την διαδικασία του προηγούμενου σκέλους.

Αν μια συνάρτησης $f(z)$ που αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε ένα δίσκο επειδή όπως αποδείξαμε έχει παράγουσα στο δίσκο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης επάνω σε κλειστή καμπύλη με ίχνος στο δίσκο μηδενίζεται.

Αν όμως η συνάρτηση έχει ανάπτυγμα Laurent σε ανοικτό δακτύλιο κέντρου z_0 τότε όπως αποδείξαμε η συνάρτηση $f(z) - \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ έχει παράγουσα στο δακτύλιο οπότε πάνω σε καμπύλη γ με ίχνος σε αυτόν ισχύει

$$\int_{\gamma} f(z)dz = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz.$$

Είναι τώρα προφανής η ανάγκη για παραπέρα μελέτη του παραπάνω ολοκληρώματος.

4.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και δείκτης στροφής.

Το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz$ εύκολα το ολοκλήρωμα ανάγεται στην περίπτωση $z_0 = 0$ την οποία θα εξετάσουμε. Αν υπάρχει ημιευθεία με αρχή το μηδέν που δεν τέμνει το ίχνος της καμπύλης δηλαδή βρίσκεται σε κάποιο C_w που ορίζεται ο κλάδος του λογαρίθμου $\text{Log}_w z = \log|z| + i\text{Arg}_w z$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $1/z$ έχει παράγουσα την $\text{Log}_w z$ οπότε έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Log}_w[\gamma(b)] - \text{Log}_w[\gamma(a)] = \text{Log} \frac{|\gamma(b)|}{|\gamma(a)|} + i(\text{Arg}_w \gamma(b) - \text{Arg}_w \gamma(a)).$$

Γενικεύοντας στην περίπτωση που υπάρχει ημιευθεία με αρχή το z_0 που δεν τέμνει το ίχνος της καμπύλης παίρνουμε

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = \text{Log} \left[\frac{|\gamma(b)|}{|\gamma(a)|} \right] + i\Theta(\gamma(a), z_0, \gamma(b)).$$

Παρατηρούμε ότι το φανταστικό μέρος του παραπάνω ολοκληρώματος παριστάνει την συνολική γωνία που διαγράφει το σημείο $\gamma(t)$ μα κορυφή το z_0 . Εάν μάλιστα η καμπύλη είναι κλειστή στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε προφανώς το ολοκλήρωμα μηδενίζεται οπότε ότι η συνολική στροφή γύρω από το z_0 είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι κατά την επαναφορά στην αρχή οι αρνητικές γωνίες και οι θετικές που διαγράφτηκαν έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει η ημιευθεία που ζητάμε μπορούμε να κάνουμε κατάλληλη διαμέριση στο διάστημα ώστε αν περιοριστούμε σε κάθε ξεχωριστό υποδιάστημα να εφαρμόζεται η προηγούμενη περίπτωση οπότε αθροίζοντας παίρνουμε

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \log \left[\frac{|\gamma(b)|}{|\gamma(a)|} \right] + i\Delta\theta$$

όπου $\Delta\theta = \sum \Delta\theta_k$ η συνολική γωνία που διαγράφει το $\gamma(t)$ περί το z_0 .

Με άλλα λόγια αν το διάνυσμα $z_0\vec{z}$ στρέφεται περί το z_0 ακολουθώντας το δρομολόγιο της καμπύλης το φανταστικό μέρος του παραπάνω ολοκληρώματος συμπίπτει με το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που διαγράφει.

Αν η καμπύλη είναι κλειστή τότε το $\Delta\theta$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π οπότε

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = k$$

όπου k το αλγεβρικό άθροισμα των στροφών του $\gamma(t)$ ως προς z_0 και για το λόγο αυτό το $n(\gamma, z_0)$ θα ονομάζεται δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το σημείο z_0 .

Τα παραπάνω σχετικά με κλειστές καμπύλες εκφράζονται πιο ολοκληρωμένα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.1. Αν γ κλειστή ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση $n(\gamma, z)$, $z \in O = \mathbb{C} - \gamma^*$

1. Παίρνει μόνο ακέραιες τιμές
2. Είναι συνεχής στο ανοικτό σύνολο O .
3. Παραμένει σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του O .
5. Μηδενίζεται σε κάθε μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του O στο μιγαδικό επίπεδο ή ισοδύναμα στην μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}_{\infty} - \gamma^*$.

Απόδειξη.

Σχετικά με το 2.

Αν περιοριστούμε σε κλειστό $D[z_0, r]$ επειδή $\frac{1}{w-z}$ είναι συνεχής στο $D[z_0, r] \times \gamma[a, b]$ που είναι συμπαγές θα είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό τότε για κάθε $\epsilon > 0$ τότε "κοντά στο z_0 " ισχύει

$$\left| \frac{1}{z-w} - \frac{1}{z_0-w} \right| < \epsilon \text{ οπότε}$$

$$|n(\gamma, z) - n(\gamma, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \left| \frac{1}{z-w} - \frac{1}{z_0-w} \right| |dz| \right| \leq \epsilon \mu(\gamma)$$

που δίνει το ζητούμενο.

Σχετικά με το 3.

Η συνάρτηση $n(\gamma, z)$ σαν συνεχής μεταφέρει κάθε συνεκτική συνιστώσα σε συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δηλαδή διάστημα ή μονοσύνολο. Η πρώτη εκδοχή αποκλείεται γιατί έχουμε μόνο ακέραιες τιμές οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Σχετικά με το 4.

Επειδή το $\gamma[a, b]$ σαν συμπαγές είναι φραγμένο από την σχέση $|w| < M$ για οποιοδήποτε φυσικό n και κατάλληλη ακολουθία $|z_n| \rightarrow \infty$ έχουμε $|z_n - w| > |z_n| - M > n$ και αν k η ακέραια τιμή της συνάρτησης στη μή φραγμένη συνεκτική συνιστώσα ισχύει

$$|k| = n(\gamma, z_n) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw \right| \leq \mu(\gamma) \frac{1}{2\pi n}.$$

Για $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Σχετικά με το 1.

Η απόδειξη που δώσαμε στην αρχή είναι αποκαλυπτική για τη γεωμετρική σημασία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και τον τρόπο που ολοκληρώνει τις "στοιχειώδεις στροφές" γύρω από ένα σημείο. Μια πιο σφιχτή αλλά λιγότερο αποκαλυπτική απόδειξη είναι η εξής.

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$H(t) = \frac{1}{\gamma(t)-z} h(t) \text{ όπου } h(t) = e^{\int_a^t \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z} dx},$$

μετά την εκτέλεση των υπολογισμών (που συνιστάται στον αναγνώστη να εκτελέσει λεπτομερώς) προκύπτει $H'(t) = 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Από το συμπέρασμα ότι H σταθερή και $\gamma(a) = \gamma(b)$ προκύπτει $1 = h(a) = h(b)$ οπότε $\int_a^b \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z} dx = 2k\pi, k$ ακέραιος ή ισοδύναμα $n(\gamma, z) = k$.

Στην περίπτωση που έχουμε συνάρτηση που αναπτύσσεται σε σειρά Laurent όπως είπαμε αν αφαιρέσουμε τον όρο τάξης -1 η υπόλοιπη σειρά έχει παράγουσα και επομένως μηδενικό ολοκλήρωμα, οπότε το ολοκλήρωμα της υπεράνω καμπύλης του δακτυλίου $2\pi n(\gamma, z_0)a_{-1}$. Για τον παραπάνω ουσιαστικό ρόλο του στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων Ο συντελεστής a_{-1} ονομάζεται Residues και στα ελληνικά ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 και θα συμβολίζεται με $Res(f, z_0)$.

Παρατηρήσεις 4.2.1. .

1.. Το πόσο δυνατό εργαλείο είναι ο δείκτης στροφής φαίνεται από το γεγονός ότι η γνώση του μετατρέπει σε περίπατο τον υπολογισμό επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που έχουν την μορφή αθροίσματος σειρών Laurent που δεν έχουν υποχρεωτικά το ίδιο κέντρο,

3. Αν την προηγούμενη σειρά Laurent την πολλαπλασιάσουμε με $(z - z_0)^{-k-1}$ ο όρος $a_k(z - z_0)^k$ στη νέα σειρά γίνεται $a_k/(z - z_0)$ που σημαίνει ότι

$$Res(f(z)(z - z_0)^k, z_0) = a_k \text{ και} \\ \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^k = 2\pi n(\gamma, z_0)a_k.$$

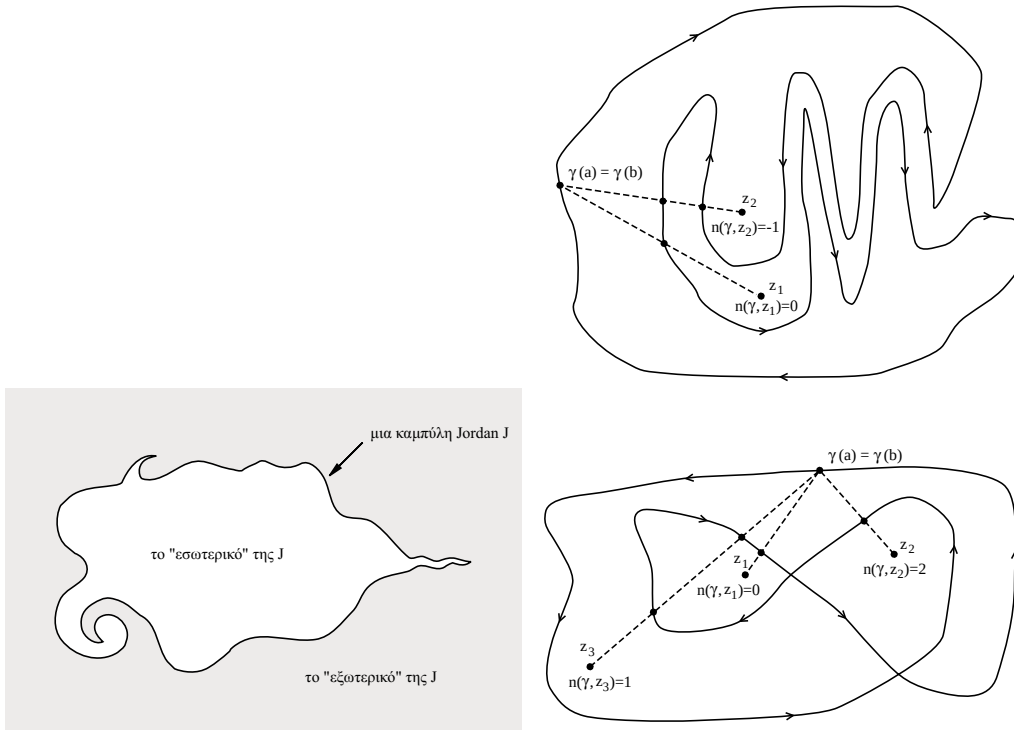
Στην ειδική περίπτωση που πάρουμε για καμπύλη ενδιάμεσο κύκλο $C(z_0, \rho) : z_0 + \rho e^{it} : t \in [0, 2\pi]$ τότε ο δείκτης στροφής είναι ένα και η σχέση γίνεται,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, \rho)} f(z)(z - z_0)^{-k-1} dz.$$

Από το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν μια συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Laurent οι συντελεστές είναι αυστηρά καθορισμένοι από την συνάρτηση, δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση με δύο διαφορετικά αναπτύγματα σε ένα σημείο. Επίσης όλες οι τιμές είναι αυστηρά καθορισμένες από τις τιμές στο ίχνος οπιασδήποτε καμπύλης με δείκτη στροφής διάφορο του μηδενός. Στο τελευταίο θα επανέλθουμε. Στις σειρές Laurent δεν έχει νόημα η σχέση $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ διότι δεν ορίζονται στο z_0 οι αντίστοιχες παράγωγοι.

3. Εμπιστευόμενοι προς στιγμή την γεωμετρική εποπτεία τεμαχίζουμε τα σημεία που δεν ανήκουν στο ίχνος μιας κλειστής της καμπύλης στο ανοικτό σύνολο των σημείων που έχουν δείκτη στροφής μηδέν και το ονομάζουμε εξωτερικό της καμπύλης και στο υπόλοιπο ανοικτό σπίσης με δείκτη στροφής μη

μηδενικό που εσωτερικό της καμπύλης. Η προσπάθειά μας για τον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων γίνεται πολύ ευκολότερη αν πάρουμε άδεια χρήσης του θεωρήματος του Jordan για υπολογισμό δεικτών στροφής που δεν πρέπει όμως να μας ξεγελάσει σαν αυτονόητο. Πιο συγκεκριμένα μια ευθυγραμμίσιμη κλειστή καμπύλη ορισμένη στο $[a, b]$ ονομάζεται καμπύλη jordan αν είναι ένα προς ένα στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Σύμφωνα με το σχετικό θεώρημα



Σχήμα 4.2:

το συμπλήρωμα του ίχνους μιας καμπύλης jordan αποτελείται από δύο ανοικτές συνεκτικές συνιστώσες το εσωτερικό που έχει δείκτη στροφής ένα ή πλην ένα και το εξωτερικό που έχει δείκτη στροφής μηδέν.

Το παραπάνω φαίνεται εντελώς φυσιολογικό διότι εφόσον από κάθε σημείο

περνάμε μια φορά θα χρειαστούμε μια στροφή θετική ή αρνητική για να σαρώσουμε όλο το ίχνος όταν είμαστε στο εσωτερικό. Παρόλα αυτά η απόδειξη είναι ιδιαίτερα σύνθετη και ξεφεύγει από τους στόχους μας. Ειδικά για την καμπύλη κύκλο $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$,

ισχύει

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz = 1$$

για κάθε σημείο w στο εσωτερικό του κύκλου.

Αρκεί με βάση το γενικό θεώρημα δείκτη στροφής να αποδείξουμε την πρόταση για $w = z_0$. Θέτοντας στο ολοκλήρωμα $z - z_0 = re^{it}, dz = ire^{it} dt$ παίρνουμε

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt = 1.$$

Τα παραπάνω σχήματα αποτελούν παράδειγμα εποπτικού υπολογισμού του δείκτη στροφής που “νομιμοποιείται” από το θεώρημα Jordan. Ένας από τους εποπτικούς τρόπους υπολογισμού του δείκτη στροφής είναι να φέρουμε ημιευθεία με αρχή το σημείο ca σε κάθε σημείο που τέμνει την καμπύλη να αντιστοιχούμε $+1$ ή -1 ανάλογα με την φορά της καμπύλης στο σημείο αυτό και στη συνέχεια να πάρουμε το άθροισμα.

Με τα νέα μας εργαλεία μπορούμε να κάνουμε την πρώτη έφοδο στον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων. Το παρακάτω πολυπαράδειγμα που θα μπορούσε να δοθεί σε ανεξάρτητες ασκήσεις θα βοηθήσει στην αφομοίωση της τεχνικής των υπολογισμών.

Παράδειγμα 4.2.1. Αν

$$f(z) = \cos \frac{1}{2z-1} + \sin^2 z + \frac{1}{(z-1)^3} e^{2z} + \frac{1}{z^2(1-z)^2} + z^2 e^{\frac{1}{(3z-1)^2}} + \frac{1}{2z-42},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z)$ υπεράνω της καμπύλης $\gamma(t) = 1 + \frac{3}{4}e^{-it}, t \in [0, 32\pi]$.

Αν $f_1(z) = \cos \frac{1}{2z-1}$, τότε το ανάπτυγμα όπως το κάναμε σε προηγούμενο παράδειγμα είναι,

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(z - \frac{1}{2}\right)^{-2n-1}.$$

Αν θέσουμε $-2n - 1 = -1$ δηλαδή $n = 0$ ο αντίστοιχος όρος γίνεται $(z - 1/2)^{-1}$, οπότε

$\text{Res}(f_1, \frac{1}{2}) = 1$ και επειδή $n(\gamma, \frac{1}{2}) = -16$ (βρείτε γιατί) έχουμε

$$\int_{\gamma} f_1(z) dz = 2\pi i n(\gamma, \frac{1}{2}) \text{Res}(f_1, \frac{1}{2}) = -32i.$$

Σχετικά με την συνάρτηση $\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z$ είναι φανερό ότι έχει παράγουσα την $\frac{1}{2}z - \frac{1}{4} \sin 2z$ οπότε $\int_{\gamma} f_2(z) dz = 0$.

Για την συνάρτηση $f_3(z) = \frac{1}{(z-1)^3} e^{2z}$, αν θέσουμε $Z = z - 1$ η συνάρτηση γίνεται

$$\frac{1}{Z^3} e^2 e^{2Z} = \frac{1}{Z^3} e^2 \left(1 + \frac{2Z}{1!} + \frac{(2Z)^2}{2!} + \dots\right)$$

και ο παράγοντας που μας ενδιαφέρει είναι

$$\frac{1}{Z^3} e^2 \frac{(2Z)^2}{2!} = \frac{2e^2}{Z} = \frac{2e^2}{z-1}.$$

Επειδή $n(\gamma, 1) = -16$ και $\text{Res}(f_3, 1) = 2e^2$ έχουμε $\int_{\gamma} f_3(z) dz = -64\pi i$.

Σχετικά με την συνάρτηση

$$f_4(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2} = \frac{2}{z} + \frac{2}{1-z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2}$$

έχουμε,

$$\int_{\gamma} \frac{2}{z} = 4\pi i n(\gamma, 0) = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{-2}{z-1} = -4\pi i n(\gamma, 1) = -64\pi i$$

(εξηγήστε γιατί)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)^2} dz = 0$$

(εξηγήστε γιατί) οπότε $\int_{\gamma} f_4(z) dz = -64\pi i$.

Σχετικά με την συνάρτηση $f_5(z) = z^2 e^{\frac{1}{(3z-1)^2}} + \frac{1}{2z-42}$,

επειδή έχουμε δώσει το ανάπτυγμα σε προηγούμενο παραδειγμα ανατρέχουμε σε αυτό και ανασύρουμε τον συντελεστή τάξης -1 που μας ενδιαφέρει που είναι το

$$\text{Res}(f_5, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9 \cdot 27} + \frac{1}{3! 27^3} + \frac{2}{3 \cdot 27^3 3!}$$

Επειδή $n(\gamma, \frac{1}{3}) = -16$ προκύπτει ότι

$$\int_{\gamma} f_5(z) dz = -32\pi i \text{Res}(f_5, \frac{1}{3}) = \dots$$

Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\frac{1}{2(z-21)}$ μηδενίζεται επειδή $n(\gamma, 21) = 0$.

Το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης ταυτίζεται με το άθροισμα των επιμέρους ολοκληρωμάτων και ο υπολογισμός αφήνεται στον αναγνώστη.

Παρατήρηση 4.2.1. Αν και έχουμε μπει στην ουσία της διαδικασίας του υπολογισμού επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων θα με την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα επανέλθουμε με νέα δεδομένα που θα την απλοποιούν σε εκείνες τις περιπτώσεις που θα καταφέρνουμε να αποσπάσουμε τον όρο a_{-1} που μας χρειάζεται χωρίς να κάνουμε όλη τη διαδικασία του αναπτύγματος. Στις περιπτώσεις που τα αναπτύγματα εξάγονται εύκολα και σύντομα ο δρόμος που ακολουθήσαμε είναι ο σίγουρος.

Νομίζουμε με τα όσα είπαμε να επαληθεύτηκε ο ισχυρισμός ότι η αναποδιά του ολοκληρώματος της συνάρτησης $1/z$ ήταν ιδιαίτερα ευεργετική στην αποκάλυψη του χαρακτήρα του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και στον εφοδιασμό μας με καύσιμα να συνεχίσουμε. Το επόμενο ταξίδι μας θα είναι για να ανακαλύψουμε τόπους “ παραδείσους ολοκλήρωσης ” αναλυτικών συναρτήσεων, δηλαδή τόπους που όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις σε αυτούς έχουν παράγouσα. Προς το παρόν γνωρίσαμε τις χρήσιμες αναποδιές των δακτυλίων που είναι τόποι χωρίς αυτή την ιδιότητα.

4.2.1 Η έννοια του απλά συνεκτικού τόπου

Ας χαλαρώσουμε λίγο τα γκέμια της μαθηματικής αυστηρότητας και ας θεωρήσουμε σαν υπόθεση εργασίας ότι υπάρχουν τόποι με την καθολική ιδιότητα της παράγουσας. Το επόμενο που μας ενδιαφέρει είναι να αναζητήσουμε τα γεωμετρικά τους διαπιστευτήρια δηλαδή να βρούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες σε κάποια απλή γεωμετρική μορφή για να τους αναγνωρίζουμε. Η πρώτη άμεση διαπίστωση είναι ότι αν για τυχόν σημείο a που δεν ανήκει σε έναν τέτοιο τόπο επειδή η συνάρτηση $1/(2\pi i(z - a))$ ορίζεται και είναι αναλυτική σε αυτόν το ολοκλήρωμα υπεράνω οποιασδήποτε κλειστές καμπύλης γ του τόπου δηλαδή ο δείκτης στροφής $n(\gamma, a)$ μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι το τμήμα που περιλείεται στο εσωτερικό κάθε καμπύλης ανήκει ολόκληρο στον τόπο και σε πιο ελεύθερη μαθηματική γλώσσα δεν υπάρχουν “τρύπες του τόπου στο εσωτερικό καμιάς καμπύλης του”. Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί μια πρόκληση για μαθηματική νομιμοποίηση της έννοιας “τρύπα ενός τόπου”. Ελπίζω να συμφωνείτε ότι την φανταζόμαστε σαν ένα φραγμένο τμήμα του επιπέδου που ανήκει στο κλειστό προφανώς συμπλήρωμα του τόπου κρατάει θετική απόσταση από το υπόλοιπο συμπλήρωμα και μπορεί να απομονωθεί από αυτό με τον εγκλωβισμό του σε κατάλληλο ανοικτό υποσύνολο του επιπέδου. αυτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά συνθέτουν τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 4.2.1. . Ένα υποσύνολο K του μιγαδικού επιπέδου αποτελεί τρύπα σε έναν τόπο OC αν είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{C} - OC)$ και η ένωση $K \cup OC$ είναι ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Με άλλα λόγια τρύπα ενός τόπου ορίζεται το συμπαγές σύνολο που προκύπτει από τον διαμελισμό του συμπληρώματος του τόπου σε ένα κλειστό και ένα συμπαγές και τα δύο μη κενά.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 4.2.1. Οι παρακάτω επι μέρους προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Ο τόπος OC δεν έχει τρύπες
2. Το κλειστο συμπλήρωμά του $\mathbb{C} - OC$ δεν διαμελίζεται σε ένα κλειστό μη κενό και ένα συμπαγές μη κενό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.
3. Το συμπλήρωμά στο επεκτεταμένο επίπεδο $(\mathbb{C}_\infty - OC)$ είναι συνεκτικό στο $\mathbb{C}_\infty$

Η ισοδυναμία των 1 και 2 προκύπτει από τον ορισμό της τρύπας.

2-3. Αν ο τόπος δεν έχει τρύπα και διαμελίστει το συμπλήρωμά του σε συμπαγές και κλειστό και στη συνέχεια επισυνάψουμε το ∞ στο κλειστό τότε το $C_\infty - OC$ διαμελίστηκε σε δύο κλειστά υποσύνολά του μή κενά επομένως δεν θα είναι συνεκτικό.

Αν ένας τόπος OC έχει μια τρύπα εποπτικά φαίνεται ότι μπορούμε να “περικυκλώσουμε” αν όχι όλη κάποιο σημείο της με καμπύλη Jordan που δίνει ολοκληρώμα δείκτη στροφής ένα που σημαίνει ότι ο τόπος με την τρύπα δεν έχει την ιδιότητα της παράγουσας. Παρά το γεγονός ότι η εικασία που προκύπτει από την παραπάνω εποπτεία είναι σωστή η αυστηρή απόδειξη θέλει αρκετή δουλειά που αναβάλλουμε για αργότερα. Όλα δείχνουν ότι πρέπει να αναζητήσουμε τόπους με “ισχυρή συνοχή” και μας οδηγούν στην εικασία ότι ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή ένας τόπος έχει την ιδιότητα της παράγουσας εάν και μόνο εάν δεν έχει τρύπες. Κατά την γνώμη μου ο πιο δόκιμος όρος για τους τόπους με την ιδιότητα της παράγουσας θα ήταν ισχυρά συνεκτικοί, παρόλα αυτά για λόγους εναρμόνισης με την κρατούσα ορολογία θα υιοθετήσουμε τον όρο απλά συνεκτικοί επισημοποιώντας τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.2.2. Ένας τόπος ονομάζεται απλά συνεκτικός αν κάθε αναλυτική συνάστηση σε αυτόν έχει παράγουσα.

Εμείς προτιμήσαμε για αρχικό προσδιορισμό του απλά συνεκτικού τόπου την καθολική ιδιότητα της παράγουσας που ήταν και το τελικό ζητούμενο αιτιολογώντας γεωμετρικά την ονομασία από τα συμπεράσματα που απορρέουν. Στην βιβλιογραφία ανάλογα με την δομή των βιβλίων θα συναντήσει κανείς ισοδύναμες εκδοχές του ορισμού με μεγαλύτερη γεωμετρική αμεσότητα μερικές από τις οποίες περιλαμβάνονται στο επόμενο θεώρημα. Οι ισοδυναμίες παρότι είναι αρκετά πειστικές και απλές εποπτικά η απόδειξη για μερικές δεν είναι τόσο απλή και η παρουσίασή τους στο επόμενο θεώρημα γίνονται με την δέσμευσή μας ότι δεν θα χρησιμοποιήσουμε κανένα συμπέρασμα προτού το αποδείξουμε.

Θεώρημα 4.2.2. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Ο τόπος OC είναι απλά συνεκτικός.
2. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων υπεράνω κλειστών καμπύλων του τόπου OC μηδενίζονται.

3. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων υπεράνω καμπύλων του τόπου OC "είναι ανεξάρτητα του δρόμου" δηλαδή ταυτίζονται για καμπύλες με την ίδια αρχή και τέλος.

4. Το συμπλήρωμα του τόπου βρίσκεται στο εξωτερικό κάθε κλειστής καμπύλης του δηλαδή ο δείκτης στροφής οποιασδήποτε καμπύλης του τόπου OC ως προς κάθε σημείο που δεν ανήκει σε αυτόν μηδενίζεται.

5. Ο τόπος OC δεν έχει τρύπες

Αν συνδυάσουμε το γεγονός ότι η απλή συνεκτικότητα ισοδυναμεί με την ιδιότητα το ολοκλήρωμα στους τόπους αυτούς να είναι ανεξάρτητο του δρόμου και εξαρτάται από τα άκρα με το γεγονός ότι κάθε καμπύλη προσεγγίζεται όσο καλά θέλουμε από πολυγωνική ή κλιμακωτή γραμμή μας βάζει σε υποψία ότι επαρκεί ο έλεγχος για την απλή συνεκτικότητα σε πολυγωνικούς δρόμους.

Με βάση τα παραπάνω ξεκινάμε την αναζήτηση σε τόπους που συνδυάζουν τις καλύτερες δυνατές προϋποθέσεις. δηλαδή για να μεταβείς από ένα σημείο σε άλλο μπορείς να ακολουθήσεις την πιο απλούστερη πολυγωνική γραμμή που είναι το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή κυρτούς τόπους. Στην περίπτωση του κυρτού τόπου η απλούστερη κλειστή πολυγωνική γραμμή είναι τρίγωνο επάνω στον τόπο που προφανώς θα ανήκει και το εσωτερικό του σε αυτό. Το πρώτο μας συμπέρασμα είναι το εξής.

Θεώρημα 4.2.3. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη σε κυρτό τόπο OC με τις παρακάτω προϋποθέσεις.

1. Η συνάρτηση είναι συνεχής στον τόπο με εξαίρεση ίσως ένα σημείο στο οποίο όμως είναι τοπικά φραγμένη

2. Για κάθε τριγωνική καμπύλη $[abca]$ στον τόπο ισχύει

$$\int_{[abca]} f(z)dz = 0.$$

Τότε η συνάρτηση

$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw$, είναι συνεχής σε όλο τον τόπο OC και ισχύει $F'(z) = f(z)$ σε κάθε σημείο συνέχειας της f .

Απόδειξη. Από την σχέση

$$\int_{[a,z_0]} f(w)dw + \int_{[z_0,z]} f(w)dw + \int_{[z,z_0]} f(w)dw = 0$$

και το γεγονός ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση είναι τοπικά φραγμένη στο z_0 δηλαδή $|f(z)| < M$ σε περιοχή του z_0 έχουμε

$$|F(z) - F(z_0)| = \left| \int_{[z_0, z]} f(w)dw \right| \leq \left| \int_{[z_0, z]} M|dw| \right| = M\mu[z_0, z] = M|z - z_0|.$$

Για $z \rightarrow z_0$ έχουμε τη συνέχεια της F στο τυχόν σημείο $z_0 \in OC$.

Αν z_0 σημείο συνέχειας της f για

$\epsilon/2 > 0$ και $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ “κοντά στο z_0 ” έχουμε

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(w)dw \right| \leq \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} \frac{\epsilon}{2} |dw| \right| < \epsilon.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $F'(z_0) = f(z_0)$ σε τυχόν z_0 σημείο συνέχειας της f .

Παρατηρήσεις 4.2.2. 1. Με μια προσεκτική ματιά στην απόδειξη παρατηρούμε ότι δεν μας ενοχλεί αν όλα τα τρίγωνα που χρησιμοποιούμε έχουν μια κορυφή σταθερή, δηλαδή μας ενδιαφέρει η σχέση της κυρτότητας ως προς ένα συγκεκριμένο σημείο a . Με βάση την παραπάνω παρατήρηση χωρίς να πειράζουμε τίποτα στην απόδειξη μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον κυρτό τόπο με αστερωτό ως προς κάποιο σημείο του a . Ένας τόπος λέγεται έτσι όταν αποτελεί ένωση κλειστών ευθυγράμμων τμημάτων με αρχή το σημείο a , δηλαδή για κάθε $z \in OC$ ισχύει $[a, z] \subseteq OC$.

2. Με μικρές μόνο προσαρμογές στην απόδειξη που αφήνονται στον αναγνώστη το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί για τόπους που το ολοκλήρωμα υπεράνω οιασδήποτε κλειστής κλιμακωτής καμπύλης που έχει κορυφή ένα σταθερό σημείο a μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή θα θεωρήσουμε $F(z) = \int_{K[a, z]} f(z)dz$ που είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της κλιμακωτής καμπύλης $K[a, z]$ με αρχή το a και τέλος το z .

3. Προφανώς στην περίπτωση που εκτός από τις παραπάνω προϋποθέσεις η f είναι συνεχής στον τόπο τότε έχει παράγουσα την F .

4. Επανερχόμενοι στο αρχικό πρόβλημα αυτό μετατράπηκε σε ένα πιά επιμέρους ερώτημα ποιές είναι εκείνες οι πρόσθετες προϋποθέσεις της συνάρτησης f ώστε να έχει την ιδιότητα του τριγώνου. Παρατηρούμε επίσης ότι στα παραπάνω θεωρήματα πουθενά δεν μπήκε η προϋπόθεση της αναλυτικότητας

και στο ερώτημα μήπως είναι εκείνο που μας λείπει για να ισχύει η ιδιότητα της παράγουσας η απάντηση είναι θετική και δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.4. (Λήμμα Coursat)

Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ανοικτό σύνολο O για τυχούσα κλειστή επιφάνεια ενός τριγώνου $[abc]$ που είναι υποσύνολο του O ισχύει

$$\int_{[abca]} f(z)dz = 0.$$

Ανταποκρινόμαστε στην έκκληση του παραπάνω θεωρήματος να αναβάλουμε λίγο την απόδειξη και να ανέβουμε στα φτερά του για ένα μικρό ενδιαφέρον ταξίδι. Το πρώτο που προβάλλει μπροστά μας είναι η πρώτη κατηγορία από τους καλούς τόπους που αναζητούμε και περιγράφονται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.5. Αν ένας τόπος είναι κυρτός ή γενικότερα αστερωτός ως προς ένα σταθερό σημείο τότε όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις σε αυτόν έχουν παράγουσα.

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον συνδυασμό του λήμματος Coursat και του θεωρήματος 4.2.3.

Με μια σχετικά εύκολη επεξεργασία στην ιδιότητα του τριγώνου μπορούμε να πάρουμε τα παρακάτω πορίσματα .

Πόρισμα 4.2.1. Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ανοικτό σύνολο που περιλαμβάνει την κλειστή επιφάνεια ενός κυρτού πολυγώνου $a_1a_2 \dots a_n$ τότε το ολοκλήρωμα υπεράνω της κλειστής πολυγωνικής γραμμής $a_1a_2 \dots a_na_1$ μηδενίζεται.

Στην περίπτωση του τετράπλευρου έχουμε

$$\begin{aligned} [a_1a_2a_3a_4a_1] &= [a_1, a_2] +^* [a_2, a_3] +^* [a_3, a_1] +^* [a_1, a_3] +^* [a_3, a_4] +^* [a_4, a_1] = \\ &[a_1a_2a_3a_1] +^* [a_1a_2a_4a_1] \end{aligned}$$

δηλαδή γράφτηκε σαν "άθροισμα" τριγωνικών γραμμών οπότε με βάση το προηγούμενο το άθροισμα μηδενίζεται

Πόρισμα 4.2.2. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική με εξαίρεση ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση είναι τοπικά φραγμένη τότε η ιδιότητα του τριγώνου εξακολουθεί να ισχύει.

Απόδειξη. Αν η εξαίρεση είναι στην κορυφή a και z, w σημεία στις πλευρές ab και ac αντίστοιχα τότε $[abca] = [azwa] +^* [wzbcw]$. Συνδυάζοντας τώρα την υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στο a με την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\left| \int_{[abca]} f(z) dz \right| = \left| \int_{[azwa]} f(z) dz \right| \leq M \mu([azwa])$$

και για $z, w \rightarrow a$ παίρνουμε το ζητούμενο. Η περίπτωση που το εξαιρούμενο σημείο δεν είναι στη κορυφή επιλύεται τώρα εύκολα συνδέοντάς το με τις κορυφές του τριγώνου εφαρμόζοντας την τριγωνική ιδιότητα στα τρίγωνα που δημιουργούνται.

4.3 Θεωρήματα Cauchy σε αστερωτά σύνολα

Η δυνατότητα της εξαίρεσης ενός σημείου a που είναι σημείο συνέχειας μιας αναλυτικής συνάρτησης μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $(f(z) - f(a))/(z - a)$ που είναι αναλυτική στον τόπο με εξαίρεση το σημείο a στο οποίο επεκτείνεται συνεχώς αν την ορίσουμε ίση με $f'(a)$. Συνδυάζοντας την ισότητα $\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz = 0$ με τον ορισμό του δείκτη στροφής παίρνουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.1. (Cauchy, πρώτη μορφή)

Αν f αναλυτική συνάρτηση σε αστερωτό τόπο OC , γ ευθυγραμμίσιμη καμπύλη με ίχνος επάνω στον τόπο, και $a \in OC - \gamma^*$ τότε

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi n(\gamma, a) f(a).$$

Θα κάνουμε μια μεγάλη στάση να “στύψουμε” το παραπάνω Θεώρημα στην απλή περίπτωση που η καμπύλη μας είναι της μορφής $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

και a στο εσωτερικό της γ . Κατόπιν συμφωνίας όπου ο συμβολισμός του ίχνος $C(z_0, r)$ της παραπάνω καμπύλης θα χρησιμοποιείται σαν καμπύλη θα εννοεί την καμπύλη γ .

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε $n(\gamma, a) = 1$ και μπορούμε να διατυπώσουμε τα παρακάτω θεωρήματα

Θεώρημα 4.3.2. Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε κλειστό δίσκο $D[z_0, r]$ τότε

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

για κάθε $a \in D(z_0, r)$

Θεώρημα 4.3.3. (Μέσης τιμής).

Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε κλειστό δίσκο $D[z_0, r]$ τότε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt$$

(Το παραπάνω σημαίνει ότι η τιμή της συνάρτησης στο κέντρο ταυτίζεται με τον μέσο όρο των τιμών σε κάθε ένα από τους ενδιαμέσους κύκλους, γεγονός που αποκαλύπτει ότι η αλληλεξάρτηση των τιμών αναλυτικής συνάρτησης είναι ταυτόχρονα “σκληρή” και “αρμονική”).

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι αναλυτική σε κλειστό δίσκο αυτό με βάση τον ορισμό της αναλυτικότητας σημαίνει ότι υπάρχει ανοικτό υπερσύνολο O του κλειστού δίσκου που η συνάρτηση είναι αναλυτική σε αυτό. Μπορούμε να θεωρήσουμε σαν O έναν ανοικτό δίσκο $D(z_0, r_1) \supseteq D[z_0, r]$ (γιατί) και να τον θεωρήσουμε σαν το κυρτό σύνολο που δουλεύουμε. Τώρα η απόδειξη για το πρώτο προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο αν θέσουμε $n(\gamma, a) = 1$, ενώ το δεύτερο προκύπτει εύκολα αν στο ολοκλήρωμα κάνουμε τούς μετασχηματισμούς $z = z_0 + re^{it}$, $dz = ie^{it} dt$.

Παρατήρηση 4.3.1. Αν περιοριστούμε στον δίσκο $D[z_0, r]$ και προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε την σχέση $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ με την προηγούμενες συζητήσεις μας προκύπτουν δύο διαπιστώσεις. Η πρώτη είναι ότι η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ έχει κάθε τάξης παράγωγο ως προς z οπότε αν είχαμε εξασφαλίσει το δικαίωμα να βγάλουμε το σύμβολο της παραγώγισης έξω από το ολοκλήρωμα θα είχαμε αποδείξει το σημαντικό συμπέρασμα που

έχουμε προαναγγείλει, δηλαδή ότι η αναλυτικές συναρτήσεις έχουν κάθε τάξης παράγωγο.

Η δεύτερη διαπίστωση είναι ότι την συνάρτηση $1/(\zeta - z)$ την έχουμε γνωρίσει σε μορφή δυναμοσειράς στο παρελθόν με την σχέση

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Αν είχαμε εξασφαλίσει το δικαίωμα να βγάλουμε το σύμβολο του αθροίσματος έξω από το ολοκλήρωμα τότε θα είχαμε απαντήσει σε κάτι ακόμη γενικότερο από το προηγούμενο που το έχουμε επίσης προαναγγείλει, δηλαδή ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση σε δίσκο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε αυτόν. Είμαστε λοιπόν σε απόσταση ανάσας για διπλή επιτυχία.

Θεώρημα 4.3.4. 1. Κάθε αναλυτική συνάρτηση σε δίσκο αποτελεί όριο δυναμοσειράς με κέντρο το κέντρο του δίσκου.

2. Οι αναλυτικές συναρτήσεις έχουν κάθε τάξης παράγωγο.

Απόδειξη. Αν το πρώτο σκέλος ισχύει το δεύτερο είναι προφανές επειδή η δυναμοσειρές έχουν κάθε τάξης παράγωγο στο δίσκο σύγκλισής τους

Αν στο εσωτερικό του κύκλου $C(z_0, r)$ σταθεροποιήσουμε το z στην σειρά της προηγούμενης παρατήρησης και θέσουμε $|z - z_0| = \rho$ προφανώς

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{\rho}{r} < 1 \text{ οπότε}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(\zeta)| |z - z_0|^n}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < \infty.$$

Από το M-τεστ προκύπτει ότι η αρχική σειρά θεωρούμενη ως προς μεταβλητή ζ συγκλίνει ομοιόμορφα οπότε μπορούμε να βγάλουμε το άθροισμα έξω από το ολοκλήρωμα δηλαδή ισχύει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

με

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ παίρνουμε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Παρατήρηση 4.3.2. Κάνοντας μια αναψηλάφηση στην προηγούμενη απόδειξη-η απόδειξη διαπιστώνουμε ότι αν θεωρήσουμε αντί κύκλου τυχούσα ευθυγραμμισίμη καμπύλη και την συνάρτηση $h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ και θεωρήσουμε τον μεγαλύτερο δυνατό δίσκο $D(z_0, r)$ που δεν τέμνει το ίχνος της καμπύλης ακολουθώντας κατά γράμμα την διαδικασία της προηγούμενης απόδειξης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στο δίσκο η συνάρτηση h αναπτύσσεται στην δυναμοσειρά $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ όπου

$$a_n = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, n = 0, 1, 2, \dots$$

Μας διευκολύνει ιδιαίτερα ο συμβολισμός $h^{(0)} = h$ και θα τον χρησιμοποιούμε απο δώ και στο εξής χωρίς αυτό να σημαίνει τίποτα περισσότερο από έναν απλό συμβολισμό) Από την τελευταία σχέση και το θεώρημα ;; καταλήγουμε στο παρακάτω γενικότερο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.5. (Cauchy, δεύτερη μορφή)

Αν θεωρήσουμε, συνάρτηση f αναλυτική σε αστερωτό τόπο OC , κλειστή καμπύλη γ επάνω στον τόπο και σημείο a του τόπου που δεν ανήκει στο ίχνος της καμπύλης τότε ισχύει

$$n(\gamma, a) f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, n = 0, 1, \dots$$

Απόδειξη.

Αν θέσουμε $h(a) = n(\gamma, a) f(a)$ τότε από την πρώτη μορφή του θεωρήματος Cauchy έχουμε

$$h(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \text{ και με βάση την προηγούμενη παρατήρηση}$$

$$h^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

Η συνάρτηση δείκτης στροφής $n(\gamma, a)$ είναι τοπικά σταθερή οπότε ισχύει $h^{(n)}(a) = n(\gamma, a) f^{(n)}(a)$.

Θεώρημα 4.3.6. (MORERA)

Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο με την ιδιότητα του τριγώνου σε αυτό είναι αναλυτική.

Η απόδειξη πρிகύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η συνάρτηση f έχει παράγουσα F η οποία με την σειρά της έχει κάθε τάξης παράγωγο οπότε $F''' = f'$.

Με τα κλειδιά που μας έδωσε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορούμε να αποκαλύψουμε πολλά μυστικά των αναλυτικών συναρτήσεων. Ένας μεγάλος αριθμός κλασικών θεωρημάτων περιμένει στη σειρά, μερικά από τα οποία θα παρουσιάσουμε άμεσα.

4.4 Εκτιμήσεις Cauchy και εφαρμογές

Πρόταση 4.4.1. Αν θεωρήσουμε, συνάρτηση f αναλυτική σε αστερωτό τόπο OC , ευθυγραμμισμη καμπύλη γ επάνω στον τόπο και σημείο a του τόπου που δεν ανήκει στο ίχνος της καμπύλης και επί πλέον ισχύει $|f(z)| \leq M(f, \gamma)$ επάνω στο ίχνος της καμπύλης, τότε ισχύουν

$$1. |n(\gamma, a)| |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} M(\gamma, f) \frac{\mu(\gamma)}{d(a, \gamma)^{n+1}}$$

$$2. \text{ Στη περίπτωση της καμπύλης } C(a, r) \text{ η παραπάνω ανισότητα γράφεται} \\ |f^{(n)}(a)| = \frac{n! M(C(a, r), f)}{r^n}$$

Απόδειξη. Συνδυάζοντας το προηγούμενο θεώρημα Cauchy με τις ανισότητες $|f(\zeta)| \leq M(\gamma, f)$ και $d(a, \gamma) \geq |\zeta - a|$ παίρνουμε

$$|n(\gamma, a)| |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - a)|^{n+1}} |d\zeta| \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M(\gamma, f) \frac{\mu(\gamma)}{d(a, \gamma)^{n+1}}$$

Το δεύτερο μέρος προκύπτει άμεσα αν θέσουμε $d(a, \gamma) = r$ και $\mu(\gamma) = 2\pi r$.

Με την εφαρμογή των εκτιμήσεων Cauchy θα αποδείξουμε δύο σπουδαία θεωρήματα ένα από τα οποία είναι το Βασικό Θεώρημα της Άλγεβρας.

Θεώρημα 4.4.1. (Liouville)

Αν μια μιγαδική συνάρτηση είναι ακεραία και φραγμένη τότε είναι σταθερή

Θεώρημα 4.4.2. (Βασικό θεώρημα της Άλγεβρας)

Κάθε πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Απόδειξη του πρώτου θεωρήματος

Αν $|f(z)| \leq M$ τότε Από την εκτίμηση Cauchy έχουμε $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{2\pi r}$ όπου $r = |z - z_0|$. Για $r \rightarrow +\infty$ παίρνουμε $f'(z_0) = 0$ για κάθε $z_0 \in C$ οπότε f σταθερή.

Απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ $a_n \neq 0$ χωρίς ρίζα, τότε προφανώς η συνάρτηση $\frac{1}{p}$ είναι ακεραία.

Από την σχέση

$$|p(z)| \geq |z|^n(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n})$$

έχουμε ότι $p(z) \rightarrow +\infty$ όταν $|z| \rightarrow +\infty$, οπότε για κατάλληλο $R > 0$ ισχύει $|p(z)| > 1$ όταν $|z| > R$.

Επειδή ο κλειστός δίσκος $D[0, R]$ είναι συμπαγές σύνολο μεταφέρεται από την συνεχή συνάρτηση $\frac{1}{|p|}$ σε συμπαγές και επομένως φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, οπότε υπάρχει $M > 0$ με $\frac{1}{|p(z)|} < M$ όταν $|z| \leq R$. Είναι τώρα φανερό ότι $\frac{1}{|p(z)|} < M + 1$ για κάθε $z \in C$, οπότε με βάση το προηγούμενο θεώρημα η ακεραία συνάρτηση $\frac{1}{p}$ είναι σταθερή οπότε και επομένως το πολυώνυμο p είναι σταθερή συνάρτηση. Επειδή αυτό δεν συμβαίνει έχουμε ρίζα.

Παρατηρήσεις 4.4.1. 1. Με τη διαδικασία της διαιρετότητας που μάθαμε στο λύκειο μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πλήθος των ριζών

ενός πολυωνύμου λαμβανομένης υπόψη και της πολλαπλότητας ισούται με τον βαθμό του.

2. Χωρίς μεγάλες διαφοροποιήσεις στη διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε γενικότερα ότι αν για ακεραία συνάρτηση ισχύει $|f(z)| \leq |z|^\alpha$, $k - 1 \leq \alpha < k$ τότε η συνάρτηση είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού $k - 1$. Επίσης με έναν πιο έξυπνο συνδυασμό των παραπάνω θεωρημάτων μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν για ακεραία συνάρτηση f και πολυώνυμο p ισχύει $|f| \leq |p|$ τότε για κατάλληλη σταθερά ισχύει $f = c.p$. (Υποδείχνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει λεπτομερώς τα παραπάνω)

3. Αν p πολυώνυμο και w μιγαδικός αριθμός από το γεγονός το πολυώνυμο $p-w$ έχει ρίζα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών κάθε πολυωνύμου είναι ολόκληρο το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Το παραπάνω συμπέρασμα δεν γενικεύεται στις ακέραιες συναρτήσεις όπως φαίνεται από την συνάρτηση e^z που εξαιρεί μόνο το σημείο μηδέν από τις τιμές της και αυτό δεν είναι τυχαίο. Οι ακέραιες συναρτήσεις που δεν είναι σταθερές εξαιρούν το πολύ ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου από τις τιμές τους. Το κλασικό αυτό αποτέλεσμα φέρει την ονομασία μικρό θεώρημα του Picard.

4.5 Ρίζες και αναλυτικές επεκτάσεις

Ξεκινάμε με το ερώτημα της μοναδικότητας των αναλυτικών επεκτάσεων που θέσαμε με αφορμή κάποιες που μελετήσαμε. Είναι προφανές ότι αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A και έχει δύο αναλυτικές επεκτάσεις F_1, F_2 σε σύνολο $B \supseteq A$ τότε τα σημεία του A είναι ρίζες της αναλυτικής συνάρτησης $F = F_1 - F_2$. Με άλλα λόγια το πρόβλημα αναγκαστικά ανάγεται σε μελέτη του συνόλου ριζών αναλυτικών συναρτήσεων.

Αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση αναλυτική στο σημείο z_0 τότε σε κατάλληλο δίσκο $D(z_0, r)$ αναλύεται στην δυναμοσειρά $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$

Αν το σημείο z_0 είναι ρίζα της συνάρτησης f βρισκόμαστε μπροστά στα δύο παρακάτω ενδεχόμενα.

1. Όλοι οι συντελεστές a_n να είναι μηδέν οπότε η συνάρτηση είναι τοπικά μηδέν.

2. Να μην είναι όλοι μηδέν οπότε θεωρούμε a_m τον πρώτο μη μηδενικό που θα συναντήσουμε δηλαδή $a_0 = \dots a_{m-1} = 0, a_m \neq 0$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ με $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \dots$ οπότε g αναλυτική στο δίσκο και $g(z_0) \neq 0$. Όταν για μια ρίζα ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις λέμε ότι είναι τάξης m . Επειδή $|g(z_0)| > 0$ και g συνεχής στο z_0 τότε γνωρίζουμε ότι

$|g(z)| > 0$ “κοντά στο z_0 ” οπότε υπάρχει περιοχή του σημείου z_0 εντός της οποίας δεν υπάρχει άλλη ρίζα, δηλαδή η ρίζα z_0 είναι μεμονωμένο σημείο στο σύνολο των ριζών της συνάρτησης f .

Τελικά διαμορφώνεται το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 4.5.1. Αν $f(z)$ αναλυτική σε σημείο z_0 , οι παρακάτω προτάσεις

είναι ισοδύναμες.

1. Το z_0 είναι ρίζα της αναλυτικής συνάρτησης f που δεν είναι τοπικά μηδενική στο z_0 .
2. Υπάρχει φυσικός αριθμός m που είναι τάξη της ρίζας z_0 .
3. Υπάρχει φυσικός αριθμός m ώστε $f(z_0) = f'(z_0) = \dots f^{(n-1)}(z_0) = 0$ και $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
4. Το σημείο z_0 αποτελεί μεμονωμένο σημείο στο σύνολο των ριζών της συνάρτησης.

Παρατήρηση 4.5.1. από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι τόπος και έχουμε μία ρίζα z_0 που δεν είναι μεμονωμένη τότε “πλημμυρίζει” με ρίζες ένας ολόκληρο δίσκος. Στη συνέχεια όλα τα σημεία του δίσκου “πλημμυρίζουν” με απείρους νέους δίσκους και λόγω της συνεκτικότητας λογικό φαίνεται με την συνέχεια της διαδικασίας να πλημμυρίσει όλο το σύνολο με ρίζες. Όλα αυτά σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα διατυπώνονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.5.2. (Θεώρημα ριζών)

Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε τόπο OC και το σύνολο των ριζών της έχει σημείο συσσωρεύσεως που να ανήκει στον τόπο τότε η συνάρτηση μηδενίζεται παντού.

Απόδειξη.

Βήμα 1. Αν ο τόπος περιέχει μη μεμονωμένη ρίζα της συνάρτησης τότε η συνάρτηση μηδενίζεται παντού.

Αν A το σύνολο των μη μεμονωμένων ριζών τότε το συμπλήρωμα $OC - A$ απαρτίζεται από τις μεμονωμένες ρίζες και τα σημεία που δεν είναι ρίζες. Αν θεωρήσουμε τυχόν στοιχείο $a \in A$ τότε η συνάρτηση είναι τοπικά μηδενική στο a οπότε υπάρχει ολόκληρη περιοχή του a με μη μεμονωμένες ρίζες (a εσωτερικό σημείο του A) και από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου προκύπτει ότι το σύνολο A είναι ανοικτό. Αν $a \in OC - A$ τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Η μία το a να είναι μεμονωμένη ρίζα οπότε υπάρχει περιοχή της χωρίς άλλη ρίζα και η άλλη που το a δεν είναι ρίζα ($|f(a)| > 0$) οπότε υπάρχει περιοχή του a χωρίς καμία ρίζα. Επειδή και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει περιοχή του a υποσύνολο του $OC - A$ (a εσωτερικό σημείο του $OC - A$) οπότε το $OC - A$ είναι ανοικτό. Επειδή το OC είναι συνεκτικό ο μόνος δυνατός διαμελισμός του σε δύο ανοικτά είναι με τον εαυτό του και το κενό σύνολο οπότε $OC = A$.

Βήμα 2. Αν ένα σημείο συσσωρεύσεως ριζών ανήκει στον τόπο τότε αποτελεί μη μεμονωμένη ρίζα.

Πράγματι, αν z_0 ένα τέτοιο σημείο σημαίνει ότι υπάρχει απειρότιμη ακολουθία ριζών $z_n \rightarrow z_0$. Επειδή f συνεχής και $z_0 \in OC$ ισχύει $0 = f(z_n) \rightarrow f(z_0)$. Το υπόλοιπο είναι προφανές.

Πόρισμα 4.5.1. (Θεώρημα ταυτισμού)

Θεωρούμε ένα ζεύγος συναρτήσεων f, g ορισμένων σε τόπο OC και

$A = \{z \in OC : f(z) = g(z)\}$ το σύνολο ταυτισμού τους. Αν το σύνολο ταυτισμού έχει σημείο συσσωρεύσεως μέσα στον τόπο τότε οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται.

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποκαλύπτει “ το σκληρά πειθαρχημένο καθεστώς ” που υπάρχει στις τιμές μιας αναλυτικής συνάρτησης σε έναν τόπο.

Το θεώρημα ταυτισμού έχει την παρακάτω ισοδύναμη διατύπωση.

Πόρισμα 4.5.2. (Αναλυτικής επέκτασης)

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο A που περιέχει ένα σημείο συσσωρεύσεως του. Αν η συνάρτηση f έχει αναλυτική επέκταση σε τόπο $OC \supseteq A$ τότε αυτή είναι μοναδική.

Παρατήρηση 4.5.2. Κάθε αναλυτική συνάρτηση σε τόπο καθορίζεται πλήρως από έναν “ κατάλληλα μικρό περιορισμό της ”.

Αν δηλαδή αν μας δοθεί μια απειρότιμη ακολουθία z_n που συγκλίνει σε σημείο z_0 του τόπου και μας θέσουν το ερώτημα αν υπάρχουν αναλυτικές συναρτήσεις στον τόπο με $f(z_n) = a_n$ όπου a_n δοσμένη μιγαδική ακολουθία τότε η απάντηση είναι ότι υπάρχει υπάρχει το πολύ μία.

Είναι τώρα προφανές ότι όλες οι επεκτάσεις που έχουμε κάνει μέχρι τώρα είναι μοναδικές διότι τα όλα πεδία ορισμού των αρχικών συναρτήσεων περιείχαν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα που όλα του προφανώς τα σημεία είναι σημεία συσσωρεύσεως του.

Επισημαίνουμε την ανάγκη του σεβασμού στις υποθέσεις αυτού του θεωρήματος. Η υπόθεση τόπος είναι κρίσιμη.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε αντί τόπου πεδίο ορισμού την ένωση δύο ξένων ανοικτών συνόλων O_1, O_2 και θεωρήσουμε την αναλυτική συνάρτηση που παίρνει την τιμή μηδέν στο O_1 και οποιαδήποτε μη μηδενική σταθερά στο O_2

τότε ολόκληρο το πρώτο σύνολο είναι σημείο συσσωρεύσεως ριζών χωρίς η συνάρτηση να είναι μηδενική.

Κρίσιμη είναι όμως και η υπόθεση ότι το σημείο συσσωρεύσεως πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού. Πράγματι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $\sin \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ τότε η ακολουθία ριζών $z_n = \frac{1}{\pi n}$ της συνάρτησης έχει όριο το μηδέν. Παρατηρούμε ότι παρό το γεγονός ότι το μηδέν είναι σημείο συσσωρεύσεως ριζών και το πεδίο ορισμού είναι τόπος η συνάρτηση δεν είναι η μηδενική. Εδώ δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα ριζών διότι το μηδέν δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Παραδείγματα 4.5.1. Να εξεταστεί αν υπάρχουν ακέραιες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

1. $f\left(\frac{1}{\sqrt[n^2+1]}}\right) = \frac{5}{(n^2+1)^5}$
2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$
3. $\frac{f'\left(\frac{1}{n}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)} = 5$, $f(2) = 13$.
4. $\frac{f'\left(\frac{1}{\sqrt[n^2+1]}}\right)}{f\left(\frac{1}{\sqrt[n^2+1]}}\right)} = \frac{14(n^2+1)^5}{(n^2+1)^5+1}$, $f(0) = 2$.

Για το πρώτο ερώτημα. Αν $z_n = \frac{1}{\sqrt[n^2+1]}$, τότε παρατηρούμε ότι $f(z_n) = 5z_n^{15}$ και $z_n \rightarrow 0$.

Αν θεωρήσουμε την ακεραία συνάρτηση $5z^{15}$ παρατηρούμε ότι το σύνολο ταυτισμού της με την $f(z)$ έχει σημείο συσσωρεύσεως μέσα στον τόπο ορισμού $\mathbb{C}$, οπότε ταυτίζονται.

Για το δεύτερο ερώτημα. Αν $z_n = \frac{1}{n}$, τότε $f(z_{2n}) = z_{2n}$ και $z_{2n} \rightarrow 0$, οπότε αν υπάρχει συνάρτηση με τον ίδιο όπως στο προηγούμενο ερώτημα συλογισμό έχουμε $f(z) = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή $f(z_{2n+1}) = -z_{2n+1}$ επαναλαμβάνοντας την διαδικασία παίρνουμε ότι $f(z) = -z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ που σημαίνει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση.

Για το τρίτο ερώτημα. Η ιδέα σε αυτήν την μορφή είναι να επινοήσουμε κάποια συνάρτηση $g(z)$ τέτοια ώστε $\frac{f'(z_n)}{f(z_n)} = \frac{g'(z_n)}{g(z_n)}$. Στην περίπτωση μας μιλάμε για τέτοια συνάρτηση είναι $g(z) = e^{5z}$. Από την προηγούμενη σχέση εύκολα παίρνουμε $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_n) = 0$ επειδή η $\left(\frac{f}{g}\right)'$ είναι αναλυτική στον τόπο και η ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν που ανήκει σε αυτόν από το θεώρημα ριζών έχουμε ότι $\left(\frac{f}{g}\right)' = 0$ από το οποίο προκύπτει $f(z) = ce^{5z}$ και από την αρχική συνθήκη προκύπτει $c = 13e^{-10}$.

Για το τέταρτο ερώτημα. Αν θέσουμε $z_n = \frac{1}{\sqrt[n^2+1]} \rightarrow 0$,

η σχέση μας γράφεται $\frac{f'(z_n)}{f(z_n)} = \frac{14z_n^{14}}{z_n^{15}+1}$.

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(z) = z^{15} + 1$, τότε είναι φανερό η σχέση $(f'g - fg')(z_n) = 0$, που με την εφαρμογή του θεωρήματος των ριζών δίνει $(f'g - fg')(z) = 0$ σε όλο τον τόπο. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση f/g σε δίσκο που η g δεν έχει ρίζες τότε από την τελευταία σχέση προκύπτει $(f/g)' = 0$ ή $f = cg$. Από το θεώρημα της μοναδικής επέκτασης δηλαδή το θεώρημα ριζών για την $f - cg$ προκύπτει ότι $f(z) = c(z^{15} + 1)$ σε όλο το επίπεδο. Από την αρχική συνθήκη παίρνουμε $c = 0$.

Παράδειγμα 4.5.1. Αν το γινόμενο δύο αναλυτικών συναρτήσεων σε τόπο είναι η μηδενική συνάρτηση να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον μία από τις δύο είναι μηδενική.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σημείο στο πεδίο ορισμού που δεν μηδενίζει κάποια από τις δύο συναρτήσεις π.χ $f(z_0) \neq 0$, τότε υπάρχει ολόκληρη περιοχή $D(z_0, r)$ στην οποία η συνάρτηση f δεν έχει ρίζα οπότε όλα τα σημεία της περιοχής είναι ρίζες της g . Με βάση το θεώρημα των ριζών η g θα μηδενίζεται παντού. (Δυστυχώς υπάρχουν περιπτώσεις που γίνεται το απαράδεκτο σφάλμα οι συναρτήσεις να αντιμετωπίζονται σαν αριθμοί και το αποτέλεσμα να θεωρείται αυτονόητο).

Όπως είπαμε στο παρελθόν “ οι τρύπες ” στο πεδίο ορισμού αναλυτικών συναρτήσεων μας δημιουργούν ανωμαλίες σχετικά με την παράγουσα. Ξεπεράσαμε όμως σχετικά εύκολα με την ιδιότητα του τριγώνου το εμπόδιο όταν η συνάρτηση ήταν τοπικά φραγμένη γύρω από μία τρύπα και στη συνέχεια αυτό το εμπόδιο αποτέλεσε κινητήρια δύναμη. Τώρα είμαστε σε θέση να αποκαλύψουμε το γεγονός ότι σε αυτή την περίπτωση η “ τρύπα μπορεί να βουλωθεί....”.

Θεώρημα 4.5.3. (Θεώρημα επέκτασης του Riemann)

Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική και φραγμένη σε έναν τρύπιο δίσκο $D(z_0, r) - \{z_0\}$ τότε υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ και η συνάρτηση επεκτείνεται αναλυτικά στο z_0 αν ορίσουμε σαν $f(z_0)$ το παραπάνω όριο.

Απόδειξη

Αν θέσουμε $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$ γνωρίζουμε ότι η F είναι συνεχής σε όλο το δίσκο και αναλυτική στον τρύπιο στον οποίο αν περιοριστούμε ισχύει $F'(z) = f(z)$ από την διαπίστωση ότι η F είναι αναλυτική στον τρύπιο δίσκο και συνεχής σε ολόκληρο προκύπτει ότι έχει παράγουσα μια συνάρτηση G σε ολόκληρο το δίσκο. Από την σχέση $G' = F$ έχουμε ότι η G είναι αναλυτική σε ολόκληρο το δίσκο και η G'' επίσης. Αλλά στον τρύπιο δίσκο ισχύει $G''(z) = F'(z) = f(z)$ που σημαίνει ότι η G'' αποτελεί αναλυτική επέκταση της f .

Παρατήρηση 4.5.3. Με βάση τα προηγούμενα θεώρημα αν έχουμε συνάρτηση αναλυτική στο τρύπιο δίσκο και συνεχή στο κέντρο τότε η συνάρτηση είναι αναλυτική σε ολόκληρο το δίσκο. Αν έχουμε γενικά αναλυτική και φραγμένη στον τρύπιο δίσκο στην χειρότερη περίπτωση μπορούμε να “διορθώσουμε” την τιμή στο κέντρο ώστε η ανωμαλία να απαλειφθεί και η συνάρτηση να τεθεί σε μορφή δυναμοσειράς. Αν με αυτό το δεδομένο κάνουμε μια αναψηλάφηση των θεωρημάτων του Cauchy που αποδείξαμε για κυρτά ή αστερωτά σύνολα παρατηρούμε τα θεωρήματα ισχύουν για απλά συνεκτικά σύνολα. Το σενάριο των αποδείξεων ξεκίνησε με την διαπίστωση ότι ότι η συνάρτηση $((f(z) - f(a))/(z - a))$ επεκτείνεται συνεχώς στο a οπότε στο κυρτό σύνολο έχει παράγουσα και το ολοκληρώμα υπεράνω κλειστής καμπύλης του μηδενίζεται, Από εκεί και μετά σταμάτησε κάθε διαμεσολάβηση της κυρτότητας ή αστερότητας του τόπου. Επειδή όπως αποδείξαμε η παραπάνω συνάρτηση επεκτείνεται και αναλυτικά στο a θα εξακολουθεί την ιδιότητα της παράγουσας που χρειαστήκαμε την έχουμε και στην περίπτωση του απλά συνεκτικού τόπου. Νομίζω ότι τώρα έχω επαρκώς αιτιολογήσει την έκφραση ότι “ή τρύπα μπορεί να βουλωθεί” και την ιδιαίτερη σημασία της αλλά εύλογα προκύπτει το ερώτημα τι γίνεται στην περίπτωση που “ή τρύπα δεν μπορεί να βουλωθεί”. Στην περίπτωση αυτή ο τρύπιος δίσκος πρέπει να αντιμετωπιστεί σαν δακτύλιος και με τους δακτυλίους όπως έχουμε μάθει συνδέονται οι σειρές Laurent γιαυτό η πολύ ενδιαφέρουσα απάντηση θα δοθεί όταν επανέλθουμε σε αυτές όπως έχουμε υποσχεθεί.

4.6 Αρχή του μεγίστου

Θεώρημα 4.6.1. Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική μη σταθερή σε τόπο OC και $D(z_0, r) \subseteq OC$ τότε υπάρχει $z \in D(z_0, r)$ τέτοιο ώστε $|f(z)| > |f(z_0)|$.

Θα αναβάλουμε για λίγο την απόδειξη για να την αναδείξουμε με τα άμεσα συμπεράσματα που απορρέουν από αυτή. Σε ελεύθερη απόδοση η παραπάνω αρχή λέει ότι για κάθε απόλυτη τιμή σε ένα σημείο μπορείς να βρεις γνησίως μεγαλύτερη οσοδήποτε κοντά του.

Μια ισοδύναμη διατύπωση της αρχής είναι η εξής.

Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική και μη σταθερή σε τόπο OC τότε η συνάρτηση $|f(z)|$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή στον τόπο.

Με την εφαρμογή της παραπάνω αρχής προκύπτει η παρακάτω ιδιαίτερα χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 4.6.1. Αν θεωρήσουμε φραγμένο τόπο OC και συνάρτηση f αναλυτική στον τόπο και συνεχή στο $\overline{OC} = OC \cup \partial OC$, τότε η $|f|$ έχει μέγιστη τιμή που την παίρνει στο σύνορο ∂OC , δηλαδή

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{OC}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial OC\}.$$

Απόδειξη. Επειδή το $\overline{OC}$ εκτός από κλειστό είναι και φραγμένο (γιατί) είναι συμπαγές, οπότε η εικόνα μέσω της συνεχούς συνάρτησης $|f|$ είναι συμπαγές υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και σαν τέτοιο θα έχει μέγιστο. Αν η συνάρτηση δεν είναι σταθερή στο OC τότε αποκλείεται με βάση την αρχή του μεγίστου να το παίρνει στο OC οπότε θα το παίρνει στο σύνορο. Η περίπτωση της σταθερής συνάρτησης είναι “τετριμμένη”.

Το εύλογο ερώτημα που τίθεται γιατί δεν μιλήσαμε ακόμη για αρχή ελαχίστου. Είναι προφανές ότι δεν ισχύει αντίστοιχη αρχή όταν η συνάρτηση έχει ρίζα.

Στην περίπτωση όμως που έχουμε αναλυτική συνάρτηση χωρίς ρίζες στον τόπο ισχύει αντίστοιχη αρχή ελαχίστου.

Με την επί πλέον προϋπόθεση ότι η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στον τόπο ο αναγνώστης καλείται να εφαρμόσει τις σχετικές με την αρχή του μεγίστου προτάσεις στην συνάρτηση $\frac{1}{f}$ και να πάρει τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Από το παρακάτω θεώρημα προκύπτει ότι και οι δύο αρχές εφαρμόζονται ελεύθερα για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη.

Θεώρημα 4.6.2. 1. Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική και μη σταθερή σε τόπο OC τότε οι συναρτήσεις $Re f, Im f$ δεν παίρνουν ούτε μέγιστη ούτε ελαχίστη τιμή στον τόπο.

2. Αν θεωρήσουμε φραγμένο τόπο OC και συνάρτηση f αναλυτική στον τόπο και συνεχή στο $\overline{OC} = OC \cup \partial OC$, τότε οι συναρτήσεις Ref , Imf ή $|f|$ παίρνουν μέγιστη και ελάχιστη στο σύνορο ∂OC .

Απόδειξη.

1. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $F = e^f$ τότε η F είναι αναλυτική και μη σταθερή (γιατί) στον τόπο. Εφαρμόζουμε την αρχή του μεγίστου στην συνάρτηση F . Από την σχέση $|F| = e^{Ref}$ προκύπτει η ζητούμενη αρχή του μεγίστου για την Ref . Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα στις συναρτήσεις $Re(-f)$, $Re(\pm if) = \mp Imf$ παίρνουμε και τα υπόλοιπα αποτελέσματα.

Παρατήρηση 4.6.1. Αν a, b, c πραγματικοί αριθμοί με $(a, b) \neq (0, 0)$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε αρχή μεγίστου και ελαχίστου για την συνάρτηση $aRef + bImf + c$ διότι ταυτίζεται με την ReF όπου $F = (a - ib)f + c$.

Εφαρμογή 4.6.1. Θεωρούμε συνάρτηση αναλυτική f σε τόπο OC , και τόπο OC_1 τέτοιο ώστε $\overline{OC_1} \subseteq OC$. Αν υποθέσουμε ότι με τις προϋποθέσεις της προηγούμενης παρατήρησης για τα a, b ισχύει $aRef(z) + bImf(z) + c = 0$ επάνω στο σύνορο ∂OC_1 τότε η f είναι σταθερή (σε ολόκληρο τον τόπο OC).

Για την απόδειξη ακολουθούμε τρία βήματα.

Βήμα 1. (Επέκταση της σχέσης από το σύνορο στο OC_1)

Στο βήμα αυτό χρησιμοποιούμε αρχή μεγίστου και ελαχίστου στην συνάρτηση $F = (a - ib)f + c$. αξιοποιώντας την σχέση

$$aRef + bImf + c = ReF,$$

που αναφέραμε στην προηγούμενη παρατήρηση. Από την υπόθεση προκύπτει

$$0 = \min ReF(\partial OC_1) = \min ReF(\overline{OC_1}) = \min ReF(\partial OC_1) =$$

$$\max ReF(\partial OC_1) = \max ReF(\overline{OC_1})$$

που σημαίνει ότι το πραγματικό μέρος της F μηδενίζεται στον τόπο OC_1 .

Βήμα 2. (Μερική απόδειξη του ζητούμενου συμπεράσματος στον τόπο OC_1)

Εφαρμόζοντας συνθήκες C-R στον τόπο OC_1 παίρνουμε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή σε αυτόν. Η αναπαράγωγή αυτού του βήματος αφήνεται στον αναγνώστη.

Βήμα 3. Η συνάρτηση F ορίζεται σε τόπο OC και ταυτίζεται με σταθερή συνάρτηση σε σύνολο OC_1 που περιέχει σημείο συσσωρεύσεώς του, δηλαδή πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του θεωρήματος ταυτισμού και η συνάρτηση F είναι σταθερή. Από τον ορισμό της F είναι προφανές ότι f σταθερή.

Εφαρμογή 4.6.2. Αν $f_1(z) = z^2 - 5z + 6$ και $f_2(z) = z^2 - 5z$,

να υπολογιστούν οι ελάχιστες και οι μέγιστες τιμές του μέτρου των συναρτήσεων στην κλειστό δίσκο $D[0, 1]$ και στην κλειστή επιφάνεια του τετραγώνου με κορυφές

$$0, 1, 1 + i, i.$$

Απόδειξη της αρχής του Μεγίστου.

Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση δεν είναι αληθής υπάρχει κλειστός δίσκος $D[z_0, r]$ τέτοιος ώστε $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ για κάθε $z \in D[z_0, r]$. Για τυχόν $\rho \leq r$ θέτοντας $f(z_0) = |f(z_0)|e^{it_0}$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|f(z_0)| = f(z_0)e^{-it_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it_0} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

και επειδή το ολοκλήρωμα ισούται με πραγματικό αριθμό ισούται με

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[e^{-it_0} f(z_0 + \rho e^{i\theta})] d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| - |f(z_0)|) d\theta \geq 0.$$

Η προηγούμενη σχέση σε συνδυασμό με την αρχική υπόθεση $|f(z_0)| - |f(z)| \leq 0$ στον κλειστό δίσκο $D[z_0, r]$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $|f(z)| = |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D[z_0, r]$ οπότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο δίσκο και επειδή το πεδίο ορισμού είναι τόπος από το θεώρημα αναλυτικής επέκτασης προκύπτει ότι είναι σταθερή σε αυτόν. Το τελευταίο όμως έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση.

4.7 Αρμονικές συναρτήσεις

Αν θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις αναλυτικές σε τόπο OC που έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος όπως αποδείξαμε με την χρήση των συνθηκών C-R διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Αν μας δώσουν μια πραγματική συνάρτηση u ορισμένη σε τόπο το πρόβλημα που τίθεται είναι τότε αποτελεί πραγματικό μέρος αναλυτικής συνάρτησης και ποιός. Στην περίπτωση της θετικής απάντησης αν βρούμε μία οι υπόλοιπες προκύπτουν προσθέτοντας σταθερές. Ας ανιχνεύσουμε καταρχήν το πρόβλημα για την εύρεση αναγκαίων συνθηκών. Αν υπάρχει αναλυτική $f = u + iv$ από τις συνθήκες C-R έχουμε $u_x = v_y, u_y = -v_x$. Επειδή η f είναι αναλυτική έχει κάθε τάξης παράγωγο οπότε και οι u, v θα έχουν συνεχείς κάθε τάξης παραγώγους. Από τις σχέσεις $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$ προκύπτει ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Εδώ θα θυμίσουμε τον παρακάτω κλασικό ορισμό.

Ορισμός 4.7.1. Μια πραγματική συνάρτηση u είναι αρμονική σε ανοικτό σύνολο O αν υπάρχουν όλες οι δευτέρας τάξης μερικές παράγωγοι, είναι συνεχείς ($u \in C^2(O)$) και επί πλέον ισχύει $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Μα βάση τον ορισμό προκύπτει ότι αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί η u πραγματικό μέρος αναλυτικής συνάρτησης είναι να είναι αρμονική.

Ορισμός 4.7.2. Αν (u, v) ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων σε τόπο, λέμε ότι η v είναι συζυγής αρμονική της u ή ισοδύναμα ή u έχει αρμονική συζυγή την v (προσοχή στην σύνταξη) αν η ανάρτηση $f = u + iv$ είναι αναλυτική στον τόπο.

Μετά τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αναγκαία συνθήκη για να έχει μια συνάρτηση συζυγή αρμονική είναι να είναι η ίδια αρμονική.

Συνεχίζουμε για την ανίχνευση ικανών συνθηκών με δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.7.1. Να εξεταστεί αν έχει συζυγή αρμονική η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Καταρχήν $u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$. Αναζητούμε συζυγή αρμονική με τις συνθήκες C-R. Από την σχέση $u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$ ολοκληρώνοντας ως προς y βρίσκουμε $v = 3x^2y - y^3 + c(x)$. Από την σχέση $v_x = -u_y$ έχουμε $6xy + c'(x) = 6xy$, οπότε $c(x) = c$, $v = 3x^2y - y^3 + c$ και $f = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + c) = z^3 + ic$.

Παράδειγμα 4.7.2. Να εξεταστεί αν έχει συζυγή αρμονική η συνάρτηση $\text{Log}|z|$ στο $\mathbb{C} - 0$.

Αν αφαιρέσουμε από το πεδίο ορισμού την αρνητική ημιευθεία στο υπόλοιπο μέρος $C_{-\pi}$ η συνάρτηση $\text{Log}z = \log|z| + i\text{Arg}z$ είναι αναλυτική οπότε το σύνολο των συζυγών αρμονικών στον τόπο $C_{-\pi}$ είναι οι συναρτήσεις της μορφής $\text{Arg}z + c$. Επειδή όμως η συναρτήσεις αυτές δεν επεκτείνονται συνεχώς στην αρνητική ημιευθεία δεν μπορούμε να έχουμε συζυγή αρμονική σε όλο το πεδίο ορισμού.

Παρατήρηση 4.7.1. Αν στο δεύτερο παράδειγμα δεν λαμβάναμε υπόψη προηγούμενες γνώσεις μας και επιχειρούσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα με την διαδικασία του πρώτου παραδείγματος ενδεχομένως να καταλήγαμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Στο ερώτημα γιατί, η απάντηση είναι ότι στο πρώτο παράδειγμα κάναμε μερικές “παρασπονδίες σε λεπτομέρειες” που στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν είχαν επίπτωση στο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα όταν ολοκληρώνουμε ως προς x ή ως προς y ξεπερνάμε σιωπηρά το γεγονός ότι ολοκληρώνουμε υπεράνω οριζόντιου ή κατακόρυφου διαστήματος που διασχίζει τον τόπο και ενδεχομένως κάποιο διάστημα μπορεί να πέσει σε τρύπα που δεν ορίζεται η συνάρτηση. Στο πρώτο παράδειγμα δεν υπήρχε πρόβλημα διότι το πεδίο ορισμού ήταν όλο το μιγαδικό επίπεδο ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τρύπα στο μηδέν και στα διαστήματα που περνάνε από αυτό δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε. Αυτό μας οδηγεί στον περιορισμό σε τόπους “χωρίς τρύπες” δηλαδή τόπους απλά συνεκτικούς στους οποίους ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 4.7.1. Μια πραγματική συνάρτηση $u(x, y)$ ορισμένη σε απλά συνεκτικό τόπο έχει συζυγή αρμονική σε αυτόν εάν και μόνο εάν είναι αρμονική.

Απόδειξη.

Το αναγκαίο της συνθήκης έχει αποδειχθεί. Για το ικανό η ιδέα είναι η εξής. Αν υπάρχει αναλυτική $f = u + iv$ τότε $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = u_x(z) - iu_y(z)$. Με βάση το προηγούμενο αν $h(z) = u_x(z) - iu_y(z)$ πρέπει να αποδείξουμε ότι η h είναι αναλυτική και έχει παράγουσα την ζητούμενη f . Πράγματι $h_x = u_{xx} - iu_{yx}$, $h_y = u_{xy} - iu_{yy}$ και από την αρμονικότητα της u προκύπτουν οι συνθήκες C-R $h_x = -ih_y$, οπότε η h είναι αναλυτική. Στο πεδίο ορισμού η συνάρτηση έχει παράγουσα $g = u^* + iv^*$ οπότε, $g'(z) = u_x^*(z) - iu_y^*(z) = u_x(z) - iu_y(z)$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει $u^*(z) + c = u(z)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση u αποτελεί το πραγματικό μέρος της αναλυτικής συνάρτησης $g + c$.

Παρατηρήσεις 4.7.1. 1. Στην περίπτωση που ο τόπος είναι κυρτός π.χ. δίσκος ή διαδικασία του πρώτου παραδείγματος εφαρμόζεται χωρίς κανένα πρόβλημα. Στην περίπτωση που ο τόπος δεν είναι κυρτός μπορούμε να περιοριστούμε σε ένα δίσκο επιλύοντας το πρόβλημα σε αυτόν. Στη συνέχεια προσπαθούμε να επεκτείνουμε αναλυτικά την συνάρτηση σε ολόκληρο τον τόπο. Αν ο τόπος είναι απλά συνεκτικός τότε σίγουρα υπάρχει αναλυτική επέκταση σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Αν ο τόπος δεν είναι τέτοιος ενδέχεται να μην υπάρχει. Αποδεικνύεται, όχι εύκολα, ότι ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος, δηλαδή αν όλες οι αρμονικές συναρτήσεις σε έναν τόπο έχουν συζυγή αρμονική τότε είναι απλά συνεκτικός.

2. Υπάρχουν περιπτώσεις αρμονικών συναρτήσεων που μπορούμε να βρούμε πρώτα την αναλυτική συνάρτηση που αποτελούν πραγματικότητας μέρος και μετά την συζυγή αρμονική της. Αυτός ο τρόπος δουλεύει ιδιαίτερα σε ρητές συναρτήσεις αλλά όχι μόνο.

Η διαδικασία είναι να θέσουμε $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ και να προσπαθήσουμε να φέρουμε την αρμονική συνάρτηση u στη μορφή $u = \frac{f(z)+f(\bar{z})}{2}$ όπου f αναλυτική συνάρτηση.

Αν εφαρμόζαμε την διαδικασία αυτή στο πρώτο παράδειγμα θα προκύπτε $u(z) = \frac{z^3+\bar{z}^3}{2} = \operatorname{Re}(z^3)$, που σημαίνει ότι η ζητούμενη αναλυτική συνάρτηση είναι $f(z) = z^3$ και οι συζυγείς αρμονικές της u είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\operatorname{Im}(z^3) + c$.

Δίνουμε ακόμη ένα παράδειγμα μελετώντας την συνάρτηση $u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία βρίσκουμε

$$u(x, y) = \frac{z^2+\bar{z}^2}{2z^2\bar{z}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Με βάση το παραπάνω η u σαν πραγματικό μέρος αναλυτικής συνάρτησης είναι αρμονική και έχει συζυγείς αρμονικές τις συναρτήσεις $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) + c$

Για να μην χρησιμοποιήσουμε το αναπόδεικτο μέρος του θεωρήματος “γεωμετρική-ς αποκάλυψης” των απλά συνεκτικών τόπων όπως έχουμε δεσμευτεί εμπλουτίζουμε τον κατάλογο με ορισμένους που θα χρειαστούμε συνενώνοντας με κατάλληλο τρόπο κυρτούς ή αστερωτούς. Οι προϋποθέσεις περιγράφονται από την παρακάτω απλή πρόταση.

Πρόταση 4.7.1. Αν δύο τόποι είναι απλά συνεκτικοί και η τομή τους είναι τόπος, τότε και η ένωσή τους είναι απλά συνεκτικός τόπος.

Απόδειξη. Αν f αναλυτική συνάρτηση στην ένωση δύο τόπων OC_1, OC_2 που πληρούν τις προϋποθέσεις της πρότασης τότε υπάρχουν συναρτήσεις F_1, F_2 ορισμένες στα OC_1, OC_2 αντίστοιχα με $F_1'(z) = f(z)$ και $F_2'(z) = f(z)$ στα αντίστοιχα σύνολα.

Επειδή $F_1'(z) = F_2'(z)$ στην τομή των τόπων και επειδή αυτή είναι τόπος επάνω στην τομή ισχύει $F_2(z) = F_1(z) + c$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση F με $F(z) = F_1(z) + c$ στο OC_1 και $F(z) = F_2(z)$ στο OC_2 . Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι ο ορισμός μας περιγράφει συνάρτηση F παράγουσα της f στον τόπο $OC_1 \cup OC_2$.

Με βάση το παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας απλή ευκλείδεια γεωμετρία μεγάλη ποικιλία τόπων με την ιδιότητα της παράγουσας. Δίνουμε δύο παραδείγματα παραδείγματα που θα μας είναι χρήσιμα.

1. Η ένωση δύο ανοικτών δίσκων που τέμνονται στο εσωτερικό τους.
2. Για τους δακτυλίους, που μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα σαν τόποι, αποδείξαμε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $1/(z - z_0)$ ότι δεν έχουν την ιδιότητα της παράγουσας. Όμως για την συγκεκριμένη συνάρτηση γνωρίζουμε ότι αν την θεωρήσουμε σε τόπο που δεν τέμνει μια ημιευθεία με αρχή το z_0 τότε έχει. Στην περίπτωση του "σχισμένου επιπέδου" από τέτοια ημιευθεία $H(z_0, \theta) = \{z_0 + te^{i\theta} : 0 \leq t < \infty\}$ δηλαδή του τόπου $\mathbb{C} - H(z_0, \theta)$ σχετικά εύκολα αποδεικνύεται ότι έχει την ιδιότητα της παράγουσας. Πράγματι αν θεωρήσουμε ολόκληρη την ευθεία, την κάθετό της και τις διαδοχικές ορθές γωνίες που διαμορφώνονται τότε το ανοικτό ημιεπίπεδο που διαμορφώνεται από τις δύο πρώτες διαδοχικές σαν κυρτός τόπος έχει την ιδιότητα. Επίσης και αυτός που διαμορφώνεται από την δεύτερη και την τρίτη. Εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση επεκτείνουμε την ιδιότητα στην ένωση. Συνεχίζοντας καταλήγουμε στο ζητούμενο. Αξιοποιώντας τις ιδέες της παραπάνω απόδειξης μπορούμε να γενικεύσουμε την πρόταση σε οποιοδήποτε "σχισμένο δακτύλιο".

Πρόταση 4.7.2. Αν θεωρήσουμε ανοικτό δακτύλιο Δ κέντρου z_0 και ημιευθεία $H(z_0, \theta) = \{z_0 + te^{i\theta} : 0 \leq t < \infty\}$, τότε ο τόπος $\Delta - H(z_0, \theta)$ είναι απλά συνεκτικός. ιδιότητα της παράγουσας.

Απόδειξη.

Σε κάθε δακτύλιο μπορούμε να θεωρήσουμε κατάλληλα μικρή γωνία με με κορυφή το κέντρο που η τομή της με τον δακτύλιο να είναι αστερωτό σύνολο ως προς κάποιο σημείο του δακτυλίου. (Παίρνουμε τυχόν σημείο του δακτυλίου

που απέχει μια συγκεκριμένη απόσταση από το z_0 , φέρνουμε τις εφαπτόμενες από το σημείο αυτό στον μικρό κύκλο και τις ημιευθείες που ενώνουν το κέντρο του δακτυλίου με τα σημεία επαφής. Οποιαδήποτε γωνία με το παραπάνω εύρος ή μικρότερο μας ικανοποιεί). Για αρκετά μεγάλο n ώστε το εύρος $2\pi/n$ να ικανοποιεί την απαίτηση της αστερότητας χωρίζουμε τον δακτύλιο σε $2n$ αστερωτά τμήματα με αντίστοιχες διαδοχικές ίσες γωνίες. Αν $T_1 \cup T_2$ η ένωση των δύο πρώτων τμημάτων του δακτυλίου τότε επειδή αποτελεί την τομή με γωνία εύρους $2\pi/n$ έχει την ιδιότητα της παράγουσας. Το ίδιο προφανώς συμβαίνει για το σύνολο $T_2 \cup T_3$. Επειδή η τομή των δύο προηγούμενων είναι τόπος η ιδιότητα της παράγουσας επεκτείνεται στο $T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Συνεχίζοντας καταλήγουμε ότι η ένωση των ανοικτών τόπων που είναι ο σκισμένος δακτύλιος έχει την ιδιότητα της παράγουσας.

Παράδειγμα 4.7.3. Παρατηρώντας προσεκτικά την παραπάνω διαδικασία διαπιστώνουμε εύκολα ότι οποιοδήποτε τμήμα του δακτυλίου αντιστοιχεί σε γωνία εύρους $< 2\pi$ έχει την ιδιότητα της παράγουσας.

Αν υποκύψουμε στον πειρασμό να συνεχίσουμε αποκλειστικά σε κυρτούς ή απλά συνεκτικούς υπάρχει τόσο υλικό που κινδυνεύουμε να τελειώσουμε το ταξίδι χωρίς να γνωρίσουμε άλλους τόπους. Ας μην ξεχνάμε ότι έχουμε ήδη συναντήσει κάποιες συναρτήσεις που δεν προτιμούν για κατοικία τους απλά συνεκτικούς τόπους αλλά δακτυλίου. Προτού όμως πάμε σε αυτές νομίζουμε ότι ήλθε η ώρα να δώσουμε την απόδειξη πρότασης που μας έδωσε φτερά να πετάξουμε μέχρι εδώ, δηλαδή της τριγωνικής ιδιότητας των αναλυτικών συναρτήσεων. Την επαναλαμβάνουμε.

Θεώρημα 4.7.2. (Λήμμα Coursat). Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική στην επιφάνεια τριγώνου ABC τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά της υπεράνω της κλειστής πολυγωνικής καμπύλης $[ABCA]$ μηδενίζεται.

Απόδειξη. Αν ABC το αρχικό τρίγωνο και A_1, B_1, C_1 Τα μέσα των πλευρών AB, BC, CA Αντίστοιχα σχετικά με τις προσανατολισμένες τριγωνικές καμπύλες έχουμε

$$T = [ABCA] = [AB_1C_1A] + [C_1A_1B_1C_1] + [A_1BB_1A_1] + [B_1CC_1B_1].$$

Το ολοκλήρωμα $\int_T f(z)dz$ αναλύεται σε άθροισμα τεσσάρων επί μέρους ολοκληρωμάτων στα αντίστοιχα τρίγωνα της προηγούμενης σχέσης. Επιλέγουμε το τρίγωνο T_1 που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα με το μεγαλύτερο μέτρο οπότε

$$|\int_T f(z)dz| \leq 4|\int_{T_1} f(z)dz|.$$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο T_1 και παίρνουμε

$$|\int_T f(z)dz| \leq 4|\int_{T_1} f(z)dz| \leq 4^2|\int_{T_2} f(z)dz| \dots \leq 4^n|\int_{T_n} f(z)dz|.$$

Επίσης ισχύει $\mu(T) = 2\mu(T_1) = \dots = 2^n\mu(T_n)$.

Αν Δ_n οι συμπαγείς επιφάνειες των αντίστοιχων τριγώνων τότε ισχύει

$\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots \supseteq \Delta_n \dots$ και $d(\Delta_n) \rightarrow 0$, δηλαδή έχουμε φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του επιπέδου που η αντίστοιχη ακολουθία των διαμέτρων τους τείνει στο μηδέν. Επειδή το μιγαδικά επίπεδο είναι πλήρης μετρικός χώρος με βάση το θεώρημα του Baire η τομή τους είναι μονοσύνολο.

Αν z_0 το σημείο τομής από την ύπαρξη της παραγώγου $f'(z_0)$ λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της έχουμε ότι

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + H(z, z_0)(z - z_0)$$

με $H(z, z_0) \rightarrow 0$ όταν $z \rightarrow z_0$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι από την παραπάνω σχέση το τμήμα $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ έχει παράγουσα την συνάρτηση

$$zf(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f'(z_0)$$

και επομένως έχει μηδενική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα και το γεγονός ότι “κοντά στο z_0 ” έχουμε

$$|H(z, z_0)| < \epsilon \text{ και } |z - z_0| < \mu(T_n)$$

παίρνουμε διαδοχικά

$$|\int_T f(z)dz| \leq 4^n|\int_{T_n} f(z)dz| \leq 4^n\epsilon|\int_{T_n} |z - z_0||dz| \leq |4^n\mu(T_n)|\epsilon \int_{T_n} |dz| = \mu(T)\epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0 \dots$

4.8 Μεμονωμένες ανωμαλίες και Residues

Σε προηγούμενο εδάφιο είχαμε προαναγγείλει ότι κάθε τυχούσα συνάρτηση αναλυτική σε δακτύλιο ισούται με την τιμή του αντίστοιχου αναπτύγματος Lau-

rent στον δακτύλιο αυτό. Διατυπώνουμε δύο σχετικά θεωρήματα που θα τα αποδείξουμε αφού πρώτα δρέψουμε τους καρπούς τους.

Θεώρημα 4.8.1. Θεωρούμε συνάρτηση f αναλυτική σε κλειστό δακτύλιο $\Delta[z_0, r, R]$,

$$\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}, \gamma_2(t) = z_0 + Re^{it} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύουν.

1. $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$
2. Αν a εσωτερικό σημείο του δακτυλίου τότε

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Το εσωτερικό των παραπάνω ολοκληρωμάτων είναι γνώριμο στην σχέση του με σειρές Laurent και δεν θα κουραστούμε πολύ να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.8.2. Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε δακτύλιο τότε αναπτύσσεται σε σειρά Laurent.

Θα μελετήσουμε με βάση το παραπάνω θεώρημα “σημειακές ανωμαλίες (τρύπες)” στην αναλυτικότητα συναρτήσεων και την επίδρασή τους στον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

Ορισμός 4.8.1. Θεωρούμε μια συνάρτηση f αναλυτική σε τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$. Στην περίπτωση που στο σημείο a , είτε δεν είναι στο πεδίο ορισμού της, είτε είναι αλλά δεν είναι αναλυτική σε αυτό θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μεμονωμένη (ή απομονωμένη) ανωμαλία στο σημείο a ή ισοδύναμα το σημείο a είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f .

Η παραπάνω συνάρτηση στο δακτύλιο -τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$, γράφεται $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ όπου,

$$f_1(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \dots$$

,

το κύριο μέρος που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C} - \{a\}$ και

$$f_2(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_k(z-a)^k + \dots$$

το ομαλό μέρος .

Παρατηρούμε καταρχή ότι η διαφορά $f(z) - f_1(z)$ ορίζεται και είναι αναλυτική στο ανοικτό $D(a, r) - \{a\}$ και επεκτείνεται αναλυτικά στο a αν της δώσουμε την τιμή a_0 .

Επειδή η μεμονωμένη ανωμαλία καθορίζεται από το κύριο μέρος διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση.

Το κύριο μέρος να μηδενίζεται ή ισοδύναμα όλοι οι συντελεστές αρνητικής τάξης μηδενίζονται ($0 = a_1 = a_{-2} = \dots = a_{-n} = \dots$).

Στην περίπτωση αυτή το σημείο a ονομάζεται απαλείψιμο ανώμαλο σημείο και η αντίστοιχη ανωμαλία απαλείψιμη. Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση μπορεί να διορθωθεί ή επεκταθεί στο a ώστε να είναι αναλυτική σε αυτό. Τελικά σε συνδυασμό με το θεώρημα επέκτασης του Riemann διαμορφώνεται το παρακάτω θεώρημα σχετικά με τα απαλείψιμα ανώμαλα σημεία.

Θεώρημα 4.8.3. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Τό σημείο a είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο για την συνάρτηση f .
2. Η συνάρτηση είναι αναλυτική και φραγμένη σε τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$.
3. Η συνάρτηση είναι αναλυτική σε τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ στο $\mathbb{C}$
4. Υπάρχει αναλυτικός περιορισμός της συνάρτησης σε τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$ που επεξεκτείνεται αναλυτικά στο κέντρο.

Δεύτερη περίπτωση.

Οι συντελεστές αρνητικής τάξης μηδενίζονται εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος και πιο συγκεκριμένα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε $a_{-m} \neq 0$ και $0 = a_{-m-1} = a_{-m-2} = \dots$ ή ισοδύναμα στον τρύπιο δίσκο η συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Laurent της μορφής

$$\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots \text{ με } a_{-m} \neq 0.$$

Με τις προηγούμενες προϋποθέσεις το σημείο a ονομάζεται πόλος τάξης m .

Θεώρημα 4.8.4. . Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Το σημείο a είναι πόλος τάξης m της συνάρτησης f .
2. Υπάρχει συνάρτηση $g(z)$ αναλυτική σε δίσκο $D(a, r)$ με $g(a) \neq 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(z) = (z-a)^{-m}g(z)$ στον τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$

3. Υπάρχει τρύπιος δίσκος $D(a, r) - \{a\}$ που ορίζεται η $1/f$, επεκτείνεται αναλυτικά σε ολόκληρο το δίσκο και το a αποτελεί ρίζα τάξης m .

Απόδειξη.

1-2.

Από τον ορισμό του πόλου τάξης m έχουμε $f(z) = (z - a)^{-m}g(z)$ όπου

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - a) + a_{-m+2}(z - a)^2 + \dots$$

Η $g(z)$ είναι αναλυτική στο δίσκο σαν δυναμοσειρά και ισχύει $g(a) = a_{-m} \neq 0$.

2-3

Επειδή $g(a) \neq 0$ υπάρχει δίσκος $D(a, r_1)$ στον οποίο η g δεν έχει ρίζες, οπότε στον αντίστοιχο τρύπιο δίσκο έχουμε

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^m \frac{1}{g(z)}.$$

Επειδή η $\frac{1}{g(z)}$ είναι αναλυτική χωρίς ρίζες στην περιοχή του a από την τελευταία σχέση παίρνουμε το ζητούμενο.

3-1

Από την σχέση

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^m h(z) \text{ με } h(a) \neq 0,$$

αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά την $\frac{1}{h(z)}$ σε περιοχή του a έχουμε

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{h(a)} + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

οπότε

$$f(z) = \frac{1}{h(a)(z - a)^m} + \frac{a_1}{(z - a)^{m-1}} + \frac{a_2}{(z - a)^{m-2}} + \dots$$

Πόρισμα 4.8.1. Το σημείο a είναι πόλος μιας αναλυτικής συνάρτησης σε τρύπιο δίσκο $D(a, r) - \{a\}$ εάν και μόνο εάν $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ή ισοδύναμα $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$

Συνδυάζοντας την σχέση

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{|f(z)|} = 0$$

με τα δύο πρώτα σχέλη του προηγούμενου θεωρήματος παίρνουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα 4.8.2. Αν το σημείο a είναι πόλος τάξης m της συνάρτησης f τότε

$$Res(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} f(z)(z-a)^m.$$

Από την σχέση $f(z) = (z-a)^{-m}g(z)$ όπου $g(z)$ είναι η δυναμοσειρά

$$a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + a_{-m+2}(z-a)^2 + \dots + a_1(z-a)^{m-1}.$$

Επειδή το $a_1 = Res(f, a)$ είναι συντελεστής $m-1$ τάξης της δυναμοσειράς που ισούται με $g^{(m-1)}(a)/(m-1)!$

(Επειδή η $f(z)(z-a)^m$ επεκτείνεται αναλυτικά στο a και με αυτή την έννοια θεωρείται αναλυτική σε αυτό ο τύπος γράφεται και στη μορφή

$$Res(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}(a).$$

Τρίτη περίπτωση

Η τρίτη εχδοχή μεμονωμένου ανώμαλου σημείου που απομένει είναι όταν στο αντίστοιχο ανάπτυγμα Laurent ισχύει $a_n \neq 0$ για άπειρο πλήθος από αρνητικούς δείκτες n . Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι στο σημείο αυτό έχουμε ουσιώδη ανωμαλία και το σημείο ονομάζεται ουσιώδες ανώμαλο σημείο. Από τα προηγούμενα δύο θεωρήματα είναι φανερό ότι ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο είναι ουσιώδες αν και μόνο εάν το όριο της συνάρτησης σε αυτό δεν υπάρχει ούτε απειρίζεται (δεν υπάρχει στο $\mathbb{C}_\infty$). Το παραπάνω μπορεί να μας αποβεί χρήσιμο στην αναγνώρισή του.

Π.χ. Αν $f(z) = \frac{1}{z-1} \cos \frac{1}{z}$ για $z_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0$ έχουμε $f(z_n) \rightarrow \infty$ και αν $w_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$ έχουμε $f(w_n) = 0$, δηλαδή βρήκαμε δύο ακολουθίες που συγκλίνουν στο σημείο αλλά οι αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης συμπεριφέρονται διαφορετικά όσον αφορά το όριο. Επομένως το μηδέν είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Μπορεί με δύο διαφορετικά όρια ένα σημείο z_0 να έδωσε τα διαπιστευτήρια της ουσιώδους ανωμαλίας αλλά στο ερώτημα πόσα δυνατά όρια μπορούμε να έχουμε από ακολουθίες της μορφής $f(z_n)$ με $z_n \rightarrow z_0$ η απάντηση είναι έκπληξη. Μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε όριο επιθυμούμε επιλέγοντας κατάλληλη ακολουθία.

Αν φανταστούμε την συνάρτηση f να μεταφέρει τα σημεία ενός z -επιπέδου σε σημεία ενός w -επιπέδου και υπήρχε ένα “ αίτημα ” του δεύτερου επιπέδου

προς την συνάρτηση να περιοριστεί κοντά στο z_0 ώστε να ένα αφήσει έναν οποιοδήποτε δίσκο έξω από τις τιμές της τότε η απάντηση που θα έπαιρνε από την συνάρτηση είναι ότι όσοδήποτε κοντά στο z_0 και αν περιοριστεί οι τιμές είναι έτσι κατανομημένες που δεν αφήνουν κανένα σημείο του επιπέδου ήσυχο διότι εισχωρούν σε όλους τους δυνατούς δίσκους.

Αυτή η λειτουργία της συνάρτησης “σαν βόμβας απείρων μεγατόνων στο z_0 ” περιγράφεται αυστηρά με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.8.5. (Casorati-Weierstras) Αν z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο σε συνάρτηση $f(z)$ τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης
2. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε δίσκο $D(z_0, \epsilon)$ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης τότε τότε η εικόνα του είναι πυκνό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή $\overline{f(D(z_0, \epsilon))} = \mathbb{C}$.
3. Για κάθε $w \in \mathbb{C}$ υπάρχει ακολουθία από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με $z_n \rightarrow z_0$ και $f(z_n) \rightarrow w$.

Απόδειξη .

1-’ 2. Αν το δεύτερο δεν είναι αληθές σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε κάποιους δίσκους

$D(w, r)$ και $D(z_0, \epsilon)$ ώστε ο πρώτος να μην περιέχει καμία τιμή της συνάρτησης όταν αυτή περιοριστεί στον δεύτερο, δηλαδή $|f(z) - w| > r$ για κάθε $z \in D(z_0, \epsilon)$.

Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{f(z)-w}$ είναι φραγμένη κοντά στο z_0 σημαίνει ότι έχει απαλείψιμη ανωμαλία σε αυτό οπότε υπάρχει

$$a \in \mathbb{C} \text{ με } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)-w} = a.$$

Αν $a \neq 0$ τότε $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w + \frac{1}{a}$, δηλαδή το z_0 είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο στην f που δεν είναι αληθές επειδή είναι ουσιώδες. Αν $a = 0$ τότε $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ δηλαδή το z_0 είναι πόλος στην f που επίσης συγκρούεται με την αρχική υπόθεση οπότε ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

Οι αποδείξεις για τις υπόλοιπες ισοδυναμίες αφήνονται στον αναγνώστη σαν σχεδόν προφανείς.

Στο σώμα της προηγούμενης απόδειξης περιέχεται και η διαδικασία για την απόδειξη της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.8.1. Αν μια μη σταθερή συνάρτηση είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο με εξαίρεση τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της το σύνολο των τιμών της θα είναι πυκνό στο μιγαδικό επίπεδο.

Αν το παραπάνω δεν είναι αληθές υπάρχει σημείο υπάρχει περιοχή $D(a, r)$ που δεν περιέχει καμία τιμή της συνάρτησης, δηλαδή $|f(z) - a| > r$ ή $\frac{1}{|f(z) - a|} < \frac{1}{r}$ σε όλο το πεδίο ορισμού της. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα επέκτασης του Riemann στη συνάρτηση $\frac{1}{f(z) - a}$ επεκτείνεται αναλυτικά σε όλα τα σημεία ανωμαλίας της f οπότε σαν ακεραία και φραγμένη είναι σταθερή, δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο.

Παρατηρήσεις 4.8.1. Σχετικά με τον χαρακτηρισμό μεμονωμένων ανώμαλων σημείων σε αθροίσματα διαφορές γινόμενα και πηλίκα αναλυτικών συναρτήσεων η εργασίες μας διευκολύνονται από τα παρακάτω απλές προτάσεις

1. Αν z_0 είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο σε συνάρτηση f και πόλος τάξης m σε συνάρτηση g τότε το z_0 είναι πόλος τάξης m στις συναρτήσεις $f \pm g$. Συνθηματικά συμβολίζουμε την παραπάνω πρόταση με

1.(απαλείψιμο, πόλος τάξης m) $\Rightarrow^\pm$ πόλος τάξης m .

Συνεχίζοντας με τον παραπάνω συμβολισμό έχουμε

2.(απαλείψιμο, απαλείψιμο) $\Rightarrow^\pm$ απαλείψιμο.

3.(πόλος, πόλος) $\Rightarrow^\pm$ πόλος ή απαλείψιμο.

4.(πόλος τάξης m , πόλος τάξης $n < m$) $\Rightarrow^\pm$ πόλος τάξης m .

5. (ουσιώδες ανώμαλο, όχι ουσιώδες ανώμαλο) $\Rightarrow^\pm$ ουσιώδες ανώμαλο.

6. (ουσιώδες ανώμαλο, ουσιώδες ανώμαλο) $\Rightarrow^\pm$ όλα τα ενδεχόμενα.

Οι αποδείξεις των παραπάνω προκύπτουν εύκολα από την διερεύνηση της μορφής του κύριου μέρους του αναπτύγματος σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

7. Για τους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις αναλυτικών συναρτήσεων όταν έχουμε ρίζες ή πόλους ακολουθούμε τον παρακάτω μνημονικό κανόνα. Σε κάθε ρίζα τάξης k αντικαθιστούμε στον τύπο τη συνάρτηση με e^k , σε κάθε πόλο τάξης m με e^{-m} , στα απαλείψιμα την μονάδα Στην περίπτωση που το τελικό αποτέλεσμα είναι e^n για $n > 0$ έχουμε ρίζα τάξης n για $n < 0$ έχουμε πόλο τάξης n και για $n = 0$ απαλείψιμο. Π.χ αν ένα σημείο είναι πόλος τάξης 3 στην συνάρτηση f_1 , ρίζα τάξης 8 στην συνάρτηση f_2 ρίζα τάξης 9 στην f_3 και πόλο τάξης 10 στην f_4 τότε στην συνάρτηση $\frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}$ αντιστοιχεί ο αριθμός $\frac{e^{-3} \cdot e^8}{e^9 \cdot e^{-10}} = e^6$ δηλαδή έχουμε ρίζα τάξης 6 ενώ το ίδιο σημείο στην συνάρτηση $\frac{f_3 f_4}{f_1 f_2}$ είναι πόλος τάξης 6.

8. Στην πιο απλή περίπτωση που το z_0 απαλείψιμο ή σημείο ολομορφίας (αναλυτικότητας) σε συνάρτηση p και πόλος τάξης 1 σε συνάρτηση q τότε, αν $p(z_0) \neq 0$ το z_0 είναι πόλος τάξης 1 στην $\frac{p}{q}$ και αν $p(z_0) = 0$ είναι απαλείψιμο. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις έχουμε $\text{Res}(\frac{p}{q}, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q'(z)}$

Παρατήρηση 4.8.1. Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ανοικτό σύνολο $O - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ και θεωρήσουμε τα κύρια μέρη $f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_k}$ της συνάρτησης f στα αντίστοιχα ανώμαλα σημεία τότε η συνάρτηση $f_{a_1} + f_{a_2}, \dots + f_{a_k}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ και η συνάρτηση $f - (f_{a_1} + f_{a_2}, \dots + f_{a_k})$ επεκτείνεται αναλυτικά σε ολόκληρο το O .

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει αν ακολουθήσουμε την διαδικασία της προηγούμενης παρατήρησης. Δηλαδή απαλείφουμε την ανωμαλία στο a_1 αφαιρώντας το κύριο μέρος f_{a_1} . Στη συνέχεια αφαιρούμε το f_{a_2} από το $f - f_{a_1}$. Συνεχίζοντας διαδοχικά παίρνουμε το ζητούμενο.

Η παρατήρηση που κάναμε έχει ιδιαίτερη αξία στον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων ιδιαίτερα όταν οι ανωμαλίες είναι σε τόπους με την ιδιότητα της παράγουσας. Όπως είδαμε σε σχετικό παράδειγμα αποφασιστικό ρόλο παίζουν οι συντελεστες τάξης -1 στους οποίους δώσαμε ειδική ονομασία.

Αν το ανοικτό σύνολο είναι απλά συνεκτικός τόπος τότε μπορούμε τώρα να έχουμε έναν απλό τύπο για τον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 4.8.6. Αν OC απλά συνεκτικός τόπος, f αναλυτική συνάρτηση στο $OC - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ με $a_1, a_2, \dots, a_k \in OC$ και γ ευθυγραμμίσιμη κλειστή καμπύλη με το ίχνος της επί του $OC - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ τότε ισχύει,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i n(\gamma, a_1) \text{Res}(f, a_1) + 2\pi i n(\gamma, a_2) \text{Res}(f, a_2) + \dots + 2\pi i n(\gamma, a_n) \text{Res}(f, a_k).$$

Απόδειξη.

Επειδή η συνάρτηση $f - (f_{a_1} + f_{a_2}, \dots + f_{a_k})$ επεκτείνεται αναλυτικά σε ολόκληρο το OC (στην ουσία μπορούμε να την θεωρούμε αναλυτική) και ο τόπος έχει την ιδιότητα της παράγουσας το ολοκλήρωμά της υπεράνω της κλειστής καμπύλης μηδενίζεται, οπότε

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f_{a_1}(z)dz + \int_{\gamma} f_{a_2}(z)dz + \dots + \int_{\gamma} f_{a_k}(z)dz.$$

Αν θεωρήσουμε το $\int_{\gamma} f_{a_1}(z)dz$ όπως και σε άλλα σημεία έχουμε επισημάνει μόνο όρος τάξης -1 , δηλαδή $\frac{Res(f, a_1)}{z-a_1}$ “προσφέρει στο ολοκλήρωμα” διότι οι υπόλοιποι έχουν παράγους και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Μα άλλα λόγια

$$\int_{\gamma} f_{a_1}(z)dz = \int_{\gamma} \frac{Res(f, a_1)}{z-a_1} dz = 2\pi i n(\gamma, a_1) Res(f, a_1).$$

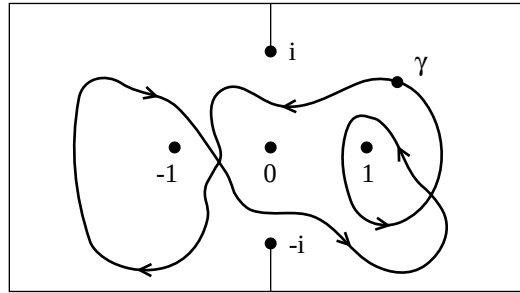
Τα υπόλοιπα είναι προφανή.

Παρατήρηση 4.8.2. Όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο εδάφιο το προηγούμενο θεώρημα γενικεύεται κα σε τυχόν ανοικτό σύνολο O για οποιαδήποτε καμπύλη του που το εσωτερικότης περιέχεται στο O ($n(\gamma, \mathbb{C} - O) = \{0\}$)).

Παράδειγμα 4.8.1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$I(k, n) = \int_{\gamma} \frac{e^{3z}}{(z - z_k)^n} dz \text{ και } J = \int_{\gamma} \frac{e^{3z} - 1}{(z^4 - 1)z^3} dz,$$

όπου $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 0, z_4 = i, z_5 = -i$, n ακέραιος και γ η καμπύλη που περιγράφεται από την παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 4.3:

Την πρώτη σημαντική όχι λεπτομέρεια που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι για $n \leq 0$ η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο οπότε το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Στην περίπτωση που n φυσικός αριθμός μας συμφέρει να ανακόψουμε την κεκτημένη ταχύτητα των *Residues* διότι ο αριθμητής της συνάρτησής μας είναι αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο απλά συνεκτικό τόπο και ο παρανομαστής έχει την μορφή $(z - a)^n$, οπότε το αποτέλεσμα δίνεται απευθείας από τον τύπο του Cauchy.

$$n(\gamma, a)f^{(n-1)}(z_k) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_k)^n} dz.$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε $f(z) = e^{3z}$, $f'(z) = 3e^{3z}$, $f''(z) = 3^2 e^{3z}$ και τελικά $f^{(n-1)}(z_k) = e^{n-1} e^{3z_k}$.

Με βάση τα παραπάνω στα ζητούμενα ολοκληρώματα δίδονται από την σχέση $I(n, k) = \frac{2\pi i}{(n-1)!} n(\gamma, z_k) e^{n-1} e^{3z_k}$.

Από το σχήμα επίσης έχουμε

$n(\gamma, z_1) = n(\gamma, 1) = 2$, $n(\gamma, z_2) = n(\gamma, -1) = 1$, $n(\gamma, z_3) = n(\gamma, 0) = 1$, $n(\gamma, z_4) = n(\gamma, i) = 0$ και $n(\gamma, z_5) = n(\gamma, -i) = 0$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των δεικτών στροφής παίρνουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα η προς ολοκλήρωση συνάρτηση γράφεται

$$f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{z^3(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)}.$$

Τα ανώμαλα σημεία είναι τα $0, \pm 1, \pm i$. Για το μηδέν παρατηρούμε ότι είναι ρίζα του αριθμητή πρώτης τάξης

(($e^{3z} - 1$)'(0) = $3 \neq 0$) και του παρανομαστή τρίτης τάξης οπότε στην συνάρτηση θα είναι πόλος δευτέρας τάξης.

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο υπολογισμού ολοκληρωτικών υπολοίπων για πόλους έχουμε

$$Res(f, 0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} (f(z)z^2)' = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{4z^2}{(z^4 + 1)^2} + \frac{1}{z^4 + 1} \left(\frac{3ze^{3z} - e^{3z} + 1}{z^2} \right).$$

Εφαρμόζοντας θεώρημα HOSPITAL έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{3ze^{3z} - e^{3z} + 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{9e^{3z}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Το υπόλοιπο τμήμα της παράστασης έχει όριο το μηδέν οπότε $\text{Res}(f, 0) = \frac{9}{2}$.

Τα υπόλοιπα ανώμαλα σημεία είναι απλές ρίζες του παρανομαστή και σημεία αναλυτικότητας του αριθμητή οπότε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα δίδονται από τις τιμές της συνάρτησης $\frac{e^{3z}-1}{7z^6-3z^2}$ αντίστοιχα σημεία, δηλαδή

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{e^3 - 1}{4} \text{ και } \text{Res}(f, -1) = \left(\frac{e^{3z} - 1}{4z^3}\right)(-1) = \frac{e^{-3} - 1}{4}.$$

Τα υπόλοιπα ανώμαλα σημεία δεν μας απασχολούν επειδή ανήκουν στο εξωτερικό μέρος της καμπύλης οπότε έχουν δείκτη στροφής μηδέν. Το τελικό αποτέλεσμα λαμβάνοντας όπως στην προηγούμενη περίπτωση υπόψη τους δείκτες στροφής είναι $\frac{e^3 + e^{-3} + 16}{4}$.

Παράδειγμα 4.8.2. Να προσδιοριστούν και χαρακτηριστούν τα μεμονομένα ανώμαλα σημεία και να υπολογιστούν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης $(e^{\frac{1}{z}} - 1)^{-1}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα υπεράνω της καμπύλης $C(\frac{i}{2\pi}, \frac{5}{14\pi})$.

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία δίδονται από τις ρίζες της εξίσωσης $e^{\frac{1}{z}} = 1$ και είναι $z_n = \frac{i}{2\pi n}, n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$. Το μηδέν δεν πρέπει να μας παραπλανήσει να το συμπεριλάβουμε επειδή υπάρχει ολόκληρη ακολουθία μεμονομένων ανώμαλων σημείων που συγκλίνει σε αυτό και επομένως δεν μπορεί να είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο, με άλλα λόγια δεν υπάρχει τρύπιος δίσκος στο μηδέν στον οποίο η συνάρτηση να είναι αναλυτική..

Επειδή

$$(e^{\frac{1}{z}} - 1)'(z_n) = -\frac{1}{z_n^2} e^{\frac{1}{z_n}} = 4\pi^2 n^2 \neq 0$$

όλα τα ανώμαλα σημεία είναι ρίζες πρώτης τάξης του παρανομαστή και δεν μηδενίζουν τον αριθμητή οπότε είναι πόλοι πρώτης τάξης και ισχύει

$$\text{Res}(f, z_n) = \frac{1}{(e^{\frac{1}{z}} - 1)'(z_n)} = \frac{1}{4\pi^2 n^2}.$$

Από την επίλυση της ανισότητας $|z_n - \frac{1}{2\pi}| < \frac{5}{14\pi}$ προκύπτει $\frac{2}{7} < n < \frac{12}{7}$ οπότε τα ανώμελα που βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης δηλαδή τα z_1, z_2 .

Επειδή ο δείκτης της καμπύλης μας ως προς τα παραπάνω σημεία είναι ένα η τιμή του ολοκληρώματος γίνεται

$$2\pi i(Res(f, z_1) + Res(f, z_2)) = \frac{5i}{8\pi^2}.$$

Παράδειγμα 4.8.3. Να προσδιοριστούν -χαρακτηριστούν τα ανώμαλα σημεία και να υπολογιστούν τς αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα την συνάρτηση $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα υπεράνω της καμπύλης $\gamma(t) = e^{-i4t}, t \in [0, 4\pi]$. (Να υπολογιστεί ο δείκτης στροφής με αυστηρή διαδικασία).

Οι ρίζες της εξίσωσης $\cos z = 0$ είναι $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$. Από την σχέση $(\cos z)'(z_n) = -\sin z_n = (-1)^{n+1} \neq 0$, προκύπτει ότι πρόκειται για ρίζες τάξης 1 του παρανομαστή που δεν μηδενίζουν τον αριθμητή επομένως είναι πόλοι πρώτης τάξης με $Re(f, z_n) = \frac{\sin z_n}{-\sin z_n} = -1$. Από τους πόλους μόνο οι $\pm\pi/2$ βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης που είναι ανοικτός δίσκος $|z| < 2$ οπότε η τιμή του ολοκληρώματος είναι $-n(\gamma, \frac{\pi}{2}) = -n(\gamma, 0)$. Εποπτικά φαίνεται ότι το δρομολόγιο της καμπύλης ολοκληρώνεται σε τέσσερες ανάποδες στροφές που επαληθεύεται αυστηρά από τη σχέση

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{1}{e^{-i4t}} (-4i) e^{-i4t} dt = -4.$$

Τελικά η τιμή του ολοκληρώματος είναι ο αριθμός 8.

Παράδειγμα 4.8.4. . Αν $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(e^z - 1)}$, υπολογίστε το $Res(f, 0)$ αφού πρώτα βρείτε το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το μηδέν δεν είναι ρίζα στον αριθμητή και είναι ρίζα τρίτης τάξης στον παρανομαστή οπότε είναι πόλος πολος τάξης τρία στην συνάρτηση. Μα βάση το παραπάνω η συνάρτηση αναπτύσσεται με κέντρο το μηδέν σε σειρά Laurent της μορφής

$$a_{-3}z^{-3} + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + \dots$$

Από τα αναπτύγματα

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{8} \dots,$$

$$z^2(e^z - 1) = z^2\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots\right) = \frac{z^3}{1} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{6} + \dots,$$

και την σχέση $\cos z = f(z)z^2(e^z - 1)$

εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας τάξης παίρνουμε τις σχέσεις

$$1 = \frac{a_{-3}}{1}, 0 = \frac{a_{-3}}{2} + \frac{a_{-2}}{1}, -\frac{1}{2} = \frac{a_{-3}}{6} + \frac{a_{-2}}{2} + a_{-1},$$

από τις οποίες προκύπτει $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = -\frac{5}{12}$.

4.8.1 Ανωμαλίες στο ∞

Για να ορίσουμε την έννοια του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου μιας αναλυτικής συνάρτησης στο ∞ μια λογική απαίτηση για να την συσχετίσουμε με την αντίστοιχη έννοια στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου είναι η συνάρτηση να είναι αναλυτική σε “περιοχή του απείρου τρύπια σε αυτό” ή αυστηρότερα σε υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου της μορφής $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{r}\}$. Ανατρέχοντας στη συνέχεια τις προτάσεις που χαρακτηρίζουν τα ανώμαλα σημεία με την οριακή συμπεριφορά σε αυτά καταλήγουμε στους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.8.2. . Αν f αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο O του μιγαδικού επιπέδου θα λέμε ότι το ∞ είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{r}\} \subset O$.

Ορισμός 4.8.3. Αν το ∞ είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο αναλυτικής συνάρτησης f τότε θα λέμε ότι είναι απαλείψιμο, αν το $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ υπάρχει στο μιγαδικό επίπεδο, πόλος όταν το παραπάνω όριο ισούται με ∞ και ουσιώδες όταν δεν αληθεύει καμία από τις προηγούμενες προτάσεις.

Είναι προφανής η απόδειξη της παρακάτω ιδιαίτερα χρήσιμης πρότασης.

Πρόταση 4.8.2. Το ∞ είναι απαλείψιμο, πόλος, ουσιώδες ανώμαλο σημείο της αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ εάν και μόνο εάν το μηδέν είναι αντίστοιχα απαλείψιμο, πόλος, ουσιώδες ανώμαλο σημείο της αναλυτικής συνάρτησης $f(\frac{1}{z})$.

Τα ερωτήματα που σχετίζονται με την ανωμαλία μιας συνάρτησης $f(z)$ στο ∞ αντιμετωπίζονται με την θεωρία που έχει προηγηθεί ανάγοντάς τα μέσω της $f(\frac{1}{z})$ σε αντίστοιχα ερωτήματα ανωμαλίας στο μηδέν.

Για να χαρακτηρίσουμε την ανωμαλία στο ∞ μέσω σειράς Laurent επειδή δεν έχουμε ανάπτυγμα με κέντρο το ∞ παίρνουμε το ανάπτυγμα με κέντρο το μηδέν δηλαδή,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots + \frac{a_1}{z} + a_0 + a_{-1}z + a_{-2}z^2 + \dots + a_{-n}z^n + \dots$$

Διαπιστώνουμε τώρα ότι ενώ ο χαρακτηρισμός του μηδενός γίνεται μέσω των συντελεστών αρνητικής τάξης ο χαρακτηρισμός του ∞ γίνεται μέσω των συντελεστών θετικής τάξης της ίδιας σειράς.

Αν $a_1 = a_2 = \dots = 0$, τότε έχουμε ότι το ∞ είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο .

Αν $a_k \neq 0$ και $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0$ τότε είναι πόλος τάξης k .

Αν $a_k = 0$ για άπειρους θετικούς δείκτες k τότε είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Ο ορισμός που θα ακολουθήσει για το $\text{Res}(f, \infty)$ στηρίζεται στην παρακάτω γεωμετρική ιδέα. Για να επεκτείνουμε την έννοια του ανοικτού δίσκου στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}_\infty$ μεταφέρουμε το πρόβλημα επάνω στην μοναδιαία σφαίρα S_2 της στερεογραφικής προβολής . Το ∞ μεταφέρεται στον βόρειο πόλο $N = (0, 0, 1)$ του οποίου ορίζονται πλήρως οι ανοικτοί δίσκοι $D(N, a)$ στη σφαίρα με την ευκλείδεια μετρική. Αν τώρα προβάλλουμε τους παραπάνω δίσκους στο μιγαδικό επίπεδο προκύπτουν τα σύνολα της μορφής $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{r}\} \cup \{\infty\}$. Με αυτή την έννοια το εξωτερικό κάθε κλειστού δίσκου με κέντρο το μηδέν μπορεί να θεωρηθεί στο $\mathbb{C}_\infty$ ανοικτός δίσκος με κέντρο το ∞ . Τό σύνορο του είναι το ίχνος της καμπύλης $C(\frac{1}{r})$. Επειδή η φορά της καμπύλης είναι θετική ως προς το μηδέν είναι λογικό να θεωρείται αρνητική ως προς το ∞ που είναι στο εξωτερικό της. Με βάση τα παραπάνω ο ορισμός που επεκτείνει τον γνωστό μας τύπο υπολογισμού του Residues με ολοκλήρωμα είναι ο παρακάτω .

Ορισμός 4.8.4. Αν $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση σε σύνολο U_ρ ορίζουμε,

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-^*C(0, \frac{1}{\rho})} f(z) dz \text{ με } r < \rho.$$

Από την παρακάτω πρόταση φαίνεται ότι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι καλά ορισμένο δηλαδή το ολοκλήρωμα του προηγούμενου ορισμού είναι ανεξάρτητο του r .

Πρόταση 4.8.3. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Απόδειξη.

Η έκφραση της καμπύλης $-^*C(0, \frac{1}{r})$ είναι $\gamma(t) = \frac{1}{r}e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ και με τον μετασχηματισμό $\zeta = \frac{1}{z} = re^{it}$, $dz = -\frac{1}{\zeta^2}d\zeta$ έχουμε

$$\int_{-^*C(0, \frac{1}{r})} f(z)dz = -\int_{C(0, r)} \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)d\zeta = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Πρόταση 4.8.4. Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε τόπο της μορφής $\mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ τότε $\operatorname{Res}(f, \infty) + \operatorname{Res}(f, z_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_k) = 0$

Απόδειξη. Θεωρούμε αρκετά μεγάλο R ώστε $z_1, z_2, \dots, z_k \in D(0, R)$ οπότε συνδυάζοντας το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων με τον ορισμό του $\operatorname{Res}(f, \infty)$ παίρνουμε

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, R)} f(z)dz = -(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_k)).$$

Παρατηρήσεις 4.8.2.

1. Αν $f(z) \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z)$ τότε το αντίστοιχο της συνάρτησης $-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$ είναι $\dots - \frac{a_{-1}}{z} + \dots$ οπότε $\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$.

2. Για να κάνουμε λόγο για μεμονωμένη ανωμαλία στο ∞ δεν πρέπει να ξεχνάμε τον έλεγχο αν η συνάρτηση είναι αναλυτική σε σύνολο U_r δηλαδή στο εξωτερικό κλειστού δίσκου με κέντρο το μηδέν. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις $\frac{1}{e^z-1}$, $\frac{1}{z}$, $\tan z$ που είναι αναλυτικές στον τόπο ορισμού τους αλλά το ∞ δεν είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο αλλά σημείο συσσωρεύσεως πόλων. Στην πρώτη συνάρτηση έχουμε την ακολουθία πόλων $2\pi in \rightarrow \infty$, στην δεύτερη $\pi n \rightarrow \infty$ και στην τρίτη $\frac{\pi}{2} + \pi n \rightarrow \infty$.

3. Το ∞ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο για όλες τις ακέραιες συναρτήσεις. Για τις ρητές $\frac{p}{q}$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

α. Αν η διαφορά (Βαθμός q -Βαθμός p) είναι μη αρνητική τότε είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.

β. Αν η παραπάνω διαφορά είναι $k < 0$ τότε το ∞ είναι πόλος τάξης k .

Όλα τα παραπάνω προκύπτουν άμεσα με την αναγωγή στην συνάρτηση $f(\frac{1}{z})$ και μελέτη της ανωμαλίας του μηδενός σε αυτή.

Παράδειγμα 4.8.5. Να χαρακτηριστεί η ανωμαλία στο ∞ και να υπολογιστεί το αντίστοιχο Residues στις συναρτήσεις

$$f_1(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}, f_2(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}, f_3(z) = e^{2z-z^{-1}}, f_4(z) = (z-1)^{-2}(z-2)^{-2}.$$

Σχετικά με την f_1 παρατηρούμε ότι υπάρχει το όριο για $z \rightarrow \infty$ και είναι 1 επομένως το ∞ είναι απαλείψιμο οπότε $Res(f, \infty) = 0$.

Σχετικά με την f_2 για τον χαρακτηρισμό έχουμε δύο επιλογές.

Η πρώτη είναι να πάρουμε το ανάπτυγμα Laurent

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots$$

οπότε έχουμε πόλο τάξης 1 και $Res(f, \infty) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Η δεύτερη επιλογή είναι να δουλέψουμε με την $f_2(\frac{1}{z})$ που αφήνεται στον αναγνώστη.

Σχετικά με την f_3 αν πάρουμε την ακολουθία $z_n = \frac{\pi n}{2} \rightarrow \infty$ έχουμε $f(z_{2n}) \rightarrow 1$ και $f(z_{2n+1}) \rightarrow -1$ που σημαίνει ότι στο ∞ ούτε υπάρχει το όριο ούτε απειρίζεται οπότε είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο. Για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο τα πράγματα είναι πιο δύσκολα. Η συνάρτηση γράφεται

$$f_3(z) = e^{2z} e^{-z^{-1}} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n} \right).$$

Από τον πολλαπλασιασμό των σειρών μας ενδιαφέρει ο όρος της μορφής az^{-1} διότι το $-a$ είναι το ζητούμενο ολοκληρωτικό υπόλοιπο. Ο συντελεστής a προκύπτει σαν άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k (-1)^{(1-k)}}{k! (k-1)!}.$$

Σχετικά με την f_4 αν πάρουμε την $f_4(\frac{1}{z}) = \frac{z^4}{(z-1)^2(2z-1)^2}$ άμεσα προκύπτει ότι το μηδέν είναι πόλος τετάρτης τάξης οπότε και το ∞ θα είναι πόλος τετάρτης τάξης στην $f(z)$.

Για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(z) = \frac{-1}{z^2} f_4\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{z^2}{(z-1)^2(2z-1)^2}$$

ου έχει το μηδέν πόλο δευτέρας τάξης οπότε

$$\text{Res}(f, \infty) = [h(z)z^2]'(0) = -4.$$

σεςτιονResidues και πραγματικά ολοκληρώματα

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τον υπολογισμό δύσκολων ολοκληρωμάτων, κυρίως γενικευμένων (καταχρηστικών) της πραγματικής ανάλυσης και όχι μόνο.

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$.

Αν R είναι ρητή συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ μπορούμε να μετασχηματίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα σε επικαμπύλιο υπεράνω της καμπύλης $C(0, 1)$ με τους παρακάτω μετασχηματισμούς.

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{iz}{z} dz,$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, οπότε η προς ολοκλήρωση συνάρτηση γίνεται

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\right).$$

και το ολοκλήρωμα είναι ίσιο με $2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k)$ όπου z_k τα ανώμαλα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. (Οι δείκτες στροφής είναι ένα επειδή ολοκληρώνουμε από 0 ως 2π , θα διπλασιάζαμε αν ολοκληρώναμε από 0 ως 4π κ.ο.κ)

Παράδειγμα 4.8.6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I(n, a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \theta)^n}, \quad J(n, a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos^2 \theta)^n} a > b > 0, n = 1, 2.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα η προς ολοκλήρωση αναλυτική συνάρτηση που προκύπτει από τους μετασχηματισμούς που αναφέραμε είναι

$$f(z) = \frac{4}{i} \frac{z^{n-1}}{(bz^2 + 2az + b)^n}.$$

Ο παρανομαστής έχει ρίζες $z_1 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b}$ και $z_2 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{b}$ από τις οποίες μόνο η z_1 είναι στο εσωτερικό της περιφέρειας. Για $n = 1$ το z_1 είναι πόλος πρώτης τάξης οπότε

$$I(1, a, b) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = 2\pi i \frac{4}{i} \cdot \frac{1}{2bz_1 + 2a} = \frac{4\pi}{bz_1 + a}.$$

για $n = 2$ έχουμε πόλο δευτέρας τάξης και επειδή

$$g(z) = \frac{4z}{ib^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}$$

έχουμε

$$\operatorname{Res}(g, z_1) = \left(\frac{4z}{ib^2(z - z_2)^2} \right)'(z_1) = -\frac{4}{ib^2} \frac{(z_1 + z_2)}{(z_1 - z_2)^3}$$

και τελικά

$$I(2, a, b) = 2\pi i \operatorname{Res}(g, z_1) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορούμε να ακολουθήσουμε κατά γράμμα την προηγούμενη διαδικασία και να βρούμε τα ανώμαλα σημεία σαν ρίζες πολωνύμου τετάρτου βαθμού. Θα αποφύγουμε όμως αρκετή ταλαιπωρία αν κινηθούμε λίγο έξυπνα και θέσουμε,

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad 2\theta = \phi \quad \phi \in [0, 4\pi], \quad d\theta = \frac{1}{2} d\phi.$$

Αν εφαρμόσουμε τους παραπάνω μετασχηματισμούς στο αρχικό ολοκλήρωμα και πάρουμε υπόψη ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση το ολοκλήρωμά μας από $[0, 4\pi]$ είναι δύο φορές το ολοκλήρωμα από $[0, 2\pi]$, παίρνουμε $J(n, a, b) = I(n, a + \frac{b}{2}, \frac{b}{2})$.

Παράδειγμα 4.8.7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \cos^n \theta$.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού με την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων δεν αποτελεί τον απλούστερο και πιο φυσιολογικό τρόπο διότι στην ουσία παρακάμπτουμε προσωρινά μια απλή μέθοδο και στο τέλος επιστρέφουμε σε αυτή χωρίς να το ομολογούμε. Σαν πρακτική άσκηση και κυρίως για να δείξουμε ότι η μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων δεν υπερέρχει πάντα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και με τους δύο τρόπους..

Καταρχήν

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^n} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik} e^{-i(n-k)}.$$

Επειδή $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} d\theta = 0$ όταν ρ μη μηδενικός ακέραιος για την ολοκλήρωση μας ενδιαφέρει μόνο ο όρος

$\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} e^{ik} e^{-i(n-k)} = \binom{n}{k} e^{i(-n+2k)}$ με $n = 2k$ που σημαίνει ότι για $n = 2k + 1$ περιττό το ολοκλήρωμα μηδενίζεται.

Για $n = 2k$ ολοκληρώνοντας τον όρο παίρνουμε $I_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} 2\pi$.

Αν ακολουθήσουμε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων η συνάρτηση που προκύπτει με τους μετασχηματισμούς είναι $f(z) = \frac{(1+z^2)^n}{iz^{n+1}}$ όποτε έχουμε μοναδικό ανώμαλο σημείο το μηδεν σαν πόλο τάξης $n+1$. Για να αποφύγουμε τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου με την επίπονη επιχείρηση να παραγωγίσουμε n φορές επιστρέφουμε στο διωνυμικό ανάπτυγμα και έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{iz^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{2k} = -i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{2k-n-1}.$$

Αν δούμε το παραπάνω άθροισμα σαν σειρά Laurent ο όρος $\frac{a-1}{z}$

που μας ενδιαφέρει στην περίπτωση $n = 2k$ είναι $-\frac{i}{z} \binom{2k}{k}$ οπότε $Res(f, 0) = -i \binom{2k}{k}$

Στην στην περίπτωση που $n = 2k + 1$ επειδή ο όρος πού μας ενδιαφέρει δεν φαίνεται στο ανάπτυγμα σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να πούμε ότι δεν

υπάρχει, αλλά δεν συμπεριλάβαμε στον συμβολισμό τον όρο $\frac{0}{z}$. Τα υπόλοιπα προκύπτουν άμεσα.

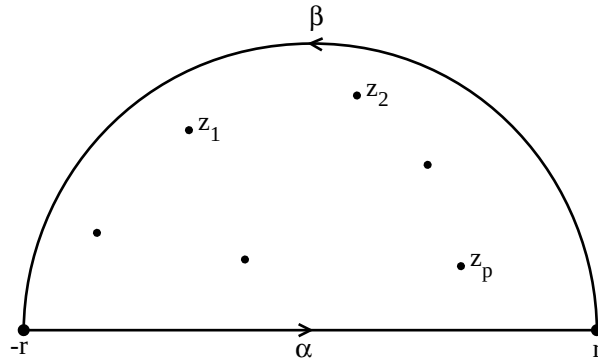
Πρόταση 4.8.5. Αν θεωρήσουμε $\lambda \geq 0$, $n(\lambda) = 0$ όταν $\lambda = 0$, $n(\lambda) = 1$ όταν $\lambda > 0$, πολυώνυμα p, q τέτοια ώστε $1 + n(\lambda) + \text{βαθμός } [q] - \text{βαθμός } [p] \geq 2$ και το $q(z)$ να μην έχει ρίζα στην πραγματική ευθεία τότε η συνάρτηση

$$F(z) = e^{-\lambda z} \frac{p(z)}{zq(z)} - \frac{p(0)}{q(0)z}$$

έχει απαλείψιμη ανωμαλία στο μηδέν και ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r F(x) dx = \frac{p(0)}{q(0)} \pi i + 2\pi i \sum_k \text{Res}(e^{-\lambda z} \frac{p(z)}{zq(z)}, z_k),$$

όπου z_k είναι οι πόλοι που ανήκουν στο άνω ημιεπίπεδο ($\text{Im} z > 0$).



Σχήμα 4.4:

Απόδειξη.

Αν $f(z) = e^{-\lambda z} \frac{p(z)}{zq(z)}$ το μηδέν είναι πόλος πρώτης τάξης όταν $p(0) \neq 0$ και απαλείψιμο όταν $p(0) = 0$, οπότε το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι $\frac{p(0)}{q(0)}$ και το κύριο μέρος $\frac{p(0)}{q(0)z}$. Αν από την συνάρτηση f αφαιρέσουμε το

κύριο μέρος της στο μηδέν προκύπτει το ομαλό της μέρος που προφανώς έχει σε αυτό απαλείψιμη ανωμαλία και ταυτίζεται με την συνάρτηση F .

Ισχυριζόμαστε στη συνέχεια ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε για κάθε $|z| \geq r_0$ να ισχύουν

$$\frac{|p(z)|}{|q(z)|} \leq \frac{M_1}{|z|^k}, \quad k = \text{βαθμός } [q] - \text{βαθμός } [p] \text{ και } |e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda r \sin \theta} \leq \frac{M_2}{|z|} \text{ όταν } \lambda > 0.$$

Αν οι ισχυρισμοί μας είναι σωστοί τότε με βάση τις υποθέσεις της πρότασης για κάθε $|z| \geq r_0$ ισχύει σχέση της μορφής $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}$ με $m \geq 2$.

Θεωρούμε τώρα κατάλληλο $r > r_0$ ώστε ο δίσκος $D(0, r)$ να συμπεριλάβει όλους τους πόλους της συνάρτησης f που περιέχονται στο άνω ημιεπίπεδο. Θεωρούμε επίσης την καμπύλη $\gamma = \alpha + i\beta$ όπου $\alpha = [-r, r]$ και $\beta(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα. Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(F, z_k) = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k)$$

όπου z_k είναι οι πόλοι του άνω ημιεπιπέδου.

Επίσης

$$\left| \int_{\beta} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\beta} \frac{M}{r^m} |dz| \right| = \frac{2\pi M}{r^{m-1}}$$

οπότε

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\beta} f(z) dz = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\alpha} F(z) dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\alpha} -\frac{p(0)}{q(0)z} dz = -\frac{p(0)}{q(0)} \int_0^{\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = -\frac{p(0)}{q(0)} \pi i$$

και τελικά

$$2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r F(x) dx + \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\beta} F(z) dz.$$

Μας απομένει η απόδειξη της ορθότητας των δύο αρχικών ισχυρισμών.

Σχετικά με τον πρώτο ισχυρισμό, αν k η διαφορά των βαθμών των πολωνύμων

$p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ και $q(z) = b_{n+k} z^{n+k} + \dots + b_0$, επειδή για $z \rightarrow \infty$, $\frac{z^k p(z)}{q(z)} \rightarrow \frac{a_n}{b_{n+k}} \neq 0$, η συνάρτηση είναι φραγμένη σε περιοχή του απείρου δηλαδή,

$$\frac{|z|^k |p(z)|}{|q(z)|} \leq M \text{ ή ισοδύναμα } \frac{|p(z)|}{|q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^k} \text{ για } |z| > r_0.$$

Ο Δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από το παρακάτω γενικώτερο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.8.7. (Λήμμα Jordan).

Αν $0 \leq a \leq b \leq \pi$ και $\lambda > 0$ τότε $\int_a^b e^{-\lambda \sin t} dt \leq \frac{\pi}{\lambda}$.

. **Απόδειξη.** Επειδή η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $\sin t - \frac{2}{\pi}t$ είναι αρνητική στο εσωτερικό του διαστήματος $[0, \frac{\pi}{2}]$ αποκλείεται να έχει ελάχιστο στο εσωτερικό του και επομένως $\sin t - \frac{2}{\pi}t \geq 0$ στο παραπάνω διάστημα. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\int_a^b e^{-\lambda \sin t} dt \leq \int_0^\pi e^{-\lambda \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2\lambda t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) \leq \frac{\pi}{\lambda}.$$

Πρόταση 4.8.6. Αν $\frac{p_1}{p_2}$ ρητή συνάρτηση χωρίς πραγματικούς πόλους με βαθμός $[p_2]$ - βαθμός $[p_1] \geq 2$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx = \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{p_1}{p_2}, z_k\right)$$

όπου z_k είναι οι πόλοι που ανήκουν στο άνω ημιεπίπεδο.

Η παραπάνω πρόταση αποτελεί την ειδική περίπτωση της πρότασης 4.8.5 για $q = p_2, p_1 = zp$ και $\lambda = 0$.

Από το θεώρημα αναλυτικής επέκτασης του Riemann ότι αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο τρύπιο σε κάποιο σημείο και επεκτείνεται συνεχώς στο σημείο αυτό τότε η επέκταση είναι και αναλυτική. Το εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι τι γίνεται στην γενικώτερη περίπτωση που αντί σημειακή τρύπα το σύνολο "σκίζεται" από το ίχνος μιας καμπύλης στο οποίο η συνάρτηση επεκτείνεται συνεχώς. Στην περίπτωση που το ίχνος βρίσκεται επάνω σε ευθεία έχουμε θετική απάντηση με το επόμενο θεώρημα.

Πρόταση 4.8.7. Αν $\frac{p_1}{p_2}$ ρητή συνάρτηση χωρίς πραγματικούς πόλους με βαθμός $[p_2]$ - βαθμός $[p_1] \geq 1$ και $\lambda > 0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}\left(e^{i\lambda z} \frac{p_1(z)}{p_2(z)}, z_k\right)$$

όπου z_k είναι οι πόλοι που ανήκουν στο άνω ημιεπίπεδο. Αν επιπλέον τα πολυώνυμα έχουν πραγματικούς συντελεστές παίρνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x) p_1(x)}{p_2(x)} dx = -2\pi \text{Im} \sum_k \text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z} p_1(z)}{p_2(z)}, z_k\right)$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x) p_1(x)}{p_2(x)} dx = 2\pi \text{Re} \sum_k \text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z} p_1(z)}{p_2(z)}, z_k\right).$$

Η παραπάνω πρόταση αποτελεί την ειδική περίπτωση της πρότασης 4.8.5 για $q = p_2, p_1 = zp$ και $\lambda > 0$

Παρατήρηση 4.8.3. Αν στην αρχική πρόταση τα πολυώνυμα p, q έχουν πραγματικούς συντελεστές και πάρουμε τα φανταστικά μέρη στο συμπέρασμα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x) p(x)}{xq(x)} dx = \pi + 2\pi \text{Re} \sum_k \text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z} p(z)}{zq(z)}, z_k\right)$$

όπου z_k είναι οι πόλοι που ανήκουν στο άνω ημιεπίπεδο και στην ειδική περίπτωση που $p = 1, q = 1, \lambda = 1$ που δεν έχουμε πόλους στο άνω ημιεπίπεδο προκύπτει το γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi.$$

Παράδειγμα 4.8.8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^4 + 1)(x^2 + 1)^2} dx.$$

Από την λύση της $z^4 + 1 = 0$ προκύπτουν οι ρίζες $z_k = e^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$. Από αυτές μόνο οι z_0, z_1 περιέχονται στο άνω ημιεπίπεδο. Οι παραπάνω ρίζες είναι απλοί πόλοι οπότε

$$Res(f, z_k) = \frac{1}{((z^4 + 1)(z^2 + 1)^2)'(z_k)}.$$

Η παράγωγος του παρανομαστή είναι $4z^3(z^4 + 1 + 2z^2) + ((z^2 + 1)^2)'(z^4 + 1)$ και στο σημείο z_k παίρνει την τιμή $-8z_k$ οπότε $Res(f, z_k) = -\frac{1}{8z_k} = -\frac{\bar{z}_k}{8}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = iz_0 \text{ παίρνουμε}$$

$$Res(f, z_0) = \frac{-1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } Res(f, z_1) = \frac{-1}{8}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Από την λύση της εξίσωσης $z^2 + 1 = 0$ μόνο η ρίζα i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και επειδή αποτελεί πόλο δευτέρας τάξης στη συνάρτηση έχουμε

$$Res(f, i) = \left(\frac{1}{(z^4 + 1)(z + i)^2}\right)'(i) = -\frac{i}{2}.$$

Τελικά η τιμή του ολοκληρώματος είναι

$$2\pi i(Re(f, z_0) + Re(f, z_1) + Res(f, i)) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Παράδειγμα 4.8.9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$.

Επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια ισχύει

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

Η συνάρτηση $\frac{e^{iz}}{1 + z^2}$ έχει στο άνω ημιεπίπεδο μοναδικό ανώμαλο σημείο το i σαν πόλο πρώτης τάξης οπότε $Res\left(\frac{ze^{iz}}{1 + z^2}, i\right) = \pi i e^{-1}$. Επειδή για την συνάρτηση πληρούνται οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-1} \text{ οπότε } I = \frac{\pi e^{-1}}{2}$$

Παράδειγμα 4.8.10. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 4.8.5 έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{ix}}{x(x^2 + 1)} - \frac{1}{x} \right) dx = \pi i + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)}, i\right) = \pi i - \pi i e^{-1}.$$

Από τα φανταστικά μέρη παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx = \pi - \pi e^{-1}.$$

και από τα πραγματικά ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται κάτι που ήταν αναμενόμενο επειδή η συνάρτηση είναι περιττή.

Θα συνεχίσουμε με ορισμένες κλασικές περιπτώσεις εφαρμογής των ολοκληρωτικών υπολοίπων στον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων με την διαφορά ότι στις αποδείξεις μας θα είμαστε λιγότερο λεπτομερείς στην χρήση ορισμένων ανισοτικών σχέσεων για τον υπολογισμό ενδιάμεσων ορίων.

Παράδειγμα 4.8.11. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ και $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$.

(Η ύπαρξή τους θεωρείται γνωστή από την πραγματική ανάλυση που είναι γνωστά σαν ολοκληρώματα Fresnel.)

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_R = [0, R] + C_R + [Re^{\frac{i\pi}{4}}, 0]$ όπου $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Αν $f(z) = e^{iz^2}$ ισχύει $\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$. Επίσης ισχύει

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} iR dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin(2t)} R dt.$$

Από το λήμμα Jordan προκύπτει ότι για $R \rightarrow +\infty$ το όριο της τελευταίας ποσότητας μηδενίζεται.

Το ολοκλήρωμα υπεράνω του ευθυγράμμου τμήματος $[Re^{\frac{i\pi}{4}}, 0]$ αν θέσουμε $z = te^{\frac{i\pi}{4}}$, $dz = e^{\frac{i\pi}{4}} dt$ γίνεται $\int_R^0 e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-t^2} dt$. Από τις προηγούμενες σχέσεις για $R \rightarrow +\infty$ προκύπτει

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{it^2} - e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dx.$$

Λαμβάνοντας υπόψη το γνωστό ολοκλήρωμα πιθανότητας $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και παίρνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη στην προηγούμενη ισότητα έχουμε ότι η τιμή και των δύο ζητούμενων ολοκληρωμάτων είναι $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Παρατήρηση 4.8.4. Το ολοκλήρωμα πιθανότητας I που χρησιμοποιήσαμε είναι από τα βασικότερα στη θεωρία πιθανοτήτων και υπάρχουν αρκετοί τρόποι υπολογισμού του στην πραγματική ανάλυση με πιο προσφιλή την μέθοδο διπλών ολοκληρωμάτων με χρήση πολικών συντεταγμένων. Μέχρι τις αρχές του αιώνα πολλοί πίστευαν ότι δεν μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Στη συνέχεια βρέθηκαν αρκετοί τρόποι. Ένας από αυτούς παρουσιάζεται στο βιβλίο του αείμνηστου καθηγητή και αγαπημένου μου φίλου Νίκου Δανίκα που μας έφυγε νωρίς. Δίνω μόνο ένα ερέθισμα για τον τρόπο για να κινήσω ίσως το ενδιαφέρον κάποιων να ανατρέξουν για πιο αναλυτική απόδειξη στο βιβλίο, ΕΝΑ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑ ΣΤΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, University studio press.

Για τον υπολογισμό επιλέχτηκαν η αναλυτική συνάρτηση $\eta \frac{e^{iz^2}}{\sin \pi z}$ και το πλάγιο προσανατολισμένο παραλληλόγραμμο $[-R - \frac{1}{2}iR, -R + \frac{1}{2}iR, R + \frac{1}{2}iR, R - \frac{1}{2}iR]$.

Η συνάρτηση στο εσωτερικό της καμπύλης έχει το μηδέν μοναδικό ανώμαλο σημείο σαν πόλο πρώτης τάξης και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι π^{-1} οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι $2i$. Για $R \rightarrow +\infty$ μηδενίζονται και τα δύο ολοκληρώματα υπεράνω των οριζόντιων πλευρών του παραλληλογράμμου και το άθροισμα των δύο υπολοίπων γίνεται $\frac{2iI}{\sqrt{\pi}}$.

Πρόταση 4.8.8. Θεωρούμε ρητή συνάρτηση f χωρίς πραγματικούς μη αρνητικούς πόλους και μή ακέραιο πραγματικό αριθμό λ τέτοιο ώστε $|z|^{\lambda+1}|f(z)| \rightarrow$

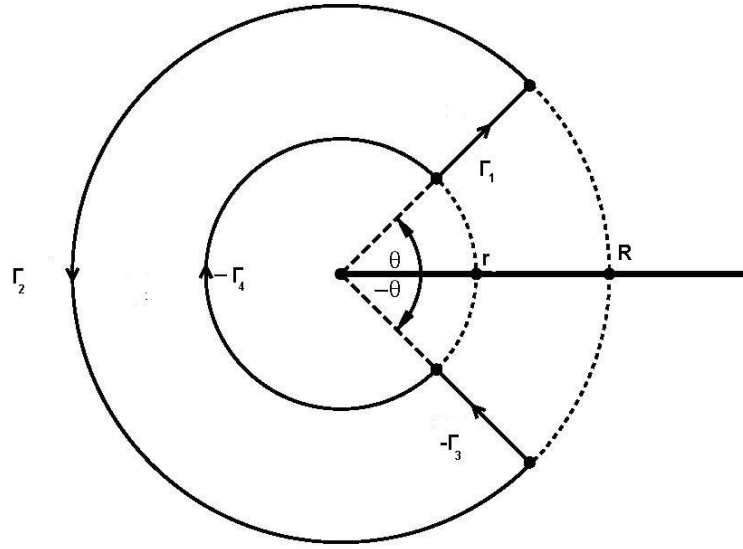
0 όταν $z \rightarrow 0$ και όταν $z \rightarrow \infty$ ($0 < \lambda + 1 < \text{βαθμός αριθμητή} - \text{βαθμός παρανομαστή}$).

Επίσης θεωρούμε τον κλαδο του λογαρίθμου $L(z) = \text{Log}|z| + i\text{Arg}_L(z)$ με $0 < \text{Arg}_L(z) < 2\pi$ και τον αντίστοιχο κλάδο της δύναμης z^w , δηλαδή $(z)_L^w = e^{wL(z)}$.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει

$$I = \int_0^{+\infty} x^\lambda f(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\lambda}}{\sin \pi\lambda} \sum_n \text{Res}(z_L^\lambda f(z), p_n)$$

όπου p_n είναι οι πόλοι της συνάρτησης.



Σχήμα 4.5:

Απόδειξη.

Θεωρούμε τις καμπύλες $\Gamma_1 = \Gamma_1(R, \theta)$, $\Gamma_2 = \Gamma_2(R, r, \theta)$, $\Gamma_3 = \Gamma_3(R, r, \theta)$, $\Gamma_4 = \Gamma_4(r, \theta)$ όπως στο παραπάνω σχήμα και $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4$. Θεωρούμε επίσης αρκετά μεγάλα R και αρκετά μικρά r, θ ώστε όλοι οι πόλοι της συνάρτησης f

να βρίσκονται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης Γ . Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{\Gamma} z_L^{\lambda} f(z) dz = 2\pi i \sum_n \text{Res}(z_L^{\lambda} f(z), p_n).$$

Από την σχέση

$$|I_2| = \left| \int_{\Gamma_2} z_L^{\lambda} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_2} |z|^{\lambda} |f(z)| |dz| \leq$$

$$\max_{|z|=R} |z|^{\lambda} |f(z)| m(\Gamma_2) \leq 2\pi \max_{|z|=R} |z|^{\lambda+1} |f(z)| \rightarrow 0 \text{ όταν } R \rightarrow +\infty.$$

. προκύπτει ότι για $\epsilon > 0$ ισχύει $|I_2| < \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $R > R_0$ (προσέξτε το αυτό) ανεξαρτήτως της επιλογής του θ . Ανάλογη σχέση αποδεικνύεται για το $I_4 = \int_{\Gamma_4} z_L^{\lambda} f(z) dz \rightarrow 0$ όταν $r \rightarrow 0$ οπότε $|I_4| < \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $r < r_0$ ανεξαρτήτως θ .

Σχετικά με το όριο του $I_1 = \int_{\Gamma_1} z_L^{\lambda} f(z) dz$ για $\theta \rightarrow 0$ επειδή προσεγγίζουμε τον θετικό ημιάξονα από τα πάνω από την επιλογή του ορίσματος έχουμε $\text{Arg}_L(z) \rightarrow 0$, $L(z) \rightarrow \text{Log} x$, $z_L^{\lambda} = |z|^{\lambda} e^{i\lambda \text{Arg}_L(z)} \rightarrow x^{\lambda}$ και τελικά

$$I_1 = \int_{\Gamma_1(R,r,\theta)} z_L^{\lambda} f(z) dz \rightarrow \int_r^R x^{\lambda} f(x) dx = I(R, r).$$

Σχετικά με το όριο του $I_3 = \int_{\Gamma_3} z_L^{\lambda} f(z) dz$ για $\theta \rightarrow 0$ επειδή προσεγγίζουμε τον θετικό ημιάξονα από τα κάτω έχουμε $\text{Arg}_L(z) \rightarrow 2\pi$, $L(z) \rightarrow \text{Log} x + 2\pi i$, $z_L^{\lambda} = |z|^{\lambda} e^{i\lambda \text{Arg}_L(z)} \rightarrow x^{\lambda} e^{2\pi i \lambda}$ και τελικά

$$I_3 = \int_{\Gamma_3(R,r,\theta)} z_L^{\lambda} f(z) dz \rightarrow \int_r^R x^{\lambda} e^{2\pi i \lambda} f(x) dx = e^{2\pi i \lambda} I(R, r).$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι για κάθε $\epsilon > 0$, $R > R_0$, $r < r_0$ και κατάλληλο θ εξαρτώμενο από τα προηγούμενα μεγέθη ισχύει

$$|I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I(R, r) + e^{2\pi i \lambda} I(R, r)| < \epsilon$$

ή

$$|2\pi i \sum_n \text{Res}(z_L^{\lambda} f(z), p_n) - I(R, r) + e^{2\pi i \lambda} I(R, r)| < \epsilon$$

για κάθε $R > R_0, r < r_0$ και τελικά

$$(1 - e^{2\pi i \lambda})I = \lim_{R \rightarrow +\infty, r \rightarrow 0} (1 - e^{2\pi i \lambda})I(R, r) = 2\pi i \sum_n \text{Res}(z_L^\lambda f(z), p_n)$$

Παράδειγμα 4.8.12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda}{x^2 + 1} dx$ για μη ακέραιο λ με $-1 < \lambda < 1$.

Καταρχήν

$$I = \frac{\pi e^{-\pi i \lambda}}{\sin \pi \lambda} \left(\text{Res}\left(\frac{z_L^\lambda}{z^2 + 1}, i\right) + \text{Res}\left(\frac{z_L^\lambda}{z^2 + 1}, -i\right) \right) = \frac{\pi e^{\pi i \lambda}}{\sin \pi \lambda} \left(\frac{(i)_L^\lambda}{2i} + \frac{(-i)_L^\lambda}{-2i} \right).$$

Επειδή

$$(-i)_L^\lambda = e^{\lambda L(-i)} = e^{\lambda(\text{Log}|-i| + i \text{Arg}_L(-i))} = e^{\frac{i\lambda 3\pi}{2}} \text{ και } (-i)_L^\lambda = e^{\frac{i\lambda \pi}{2}}$$

έχουμε

$$I = \left(\frac{e^{-\frac{\lambda \pi i}{2}}}{2i} - \frac{e^{\frac{\lambda \pi i}{2}}}{2i} \right) \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} = \frac{\pi}{(\cos(\frac{\pi}{2}))}.$$

Πρόταση 4.8.9. Θεωρούμε ρητή συνάρτηση $f = \frac{p}{q}$ χωρίς πραγματικούς μη αρνητικούς πόλους με βαθμός- $[q]$ - βαθμός- $[p] \geq 2$

Επίσης θεωρούμε τον κλαδο του λογαρίθμου $L(z) = \text{Log}|z| + i \text{Arg}_L(z)$ με $0 < \text{Arg}_L(z) < 2\pi$.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx = - \sum_n \text{Res}(L(z)f(z), p_n)$$

όπου p_n είναι οι πόλοι της συνάρτησης.

Για την απόδειξη ακολουθούμε την διαδικασία της προηγούμενης πρότασης θεωρώντας υπεράνω της καμπύλης Γ του προηγούμενου σχήματος την αναλυτική συνάρτηση $L(z)f(z)$

Παράδειγμα 4.8.13. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$.

Θεωρούμε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση την συνάρτηση $\frac{L(z)}{z^3+1}$ που έχει ως απλούς πόλους τα σημεία z_k όπου

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -1, z_3 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ και αντίστοιχα}$$

$$\text{ολοκληρωτικά υπόλοιπα } \frac{L(z_k)}{3z_k^2} = -\frac{z_k L(z_k)}{3} \text{ οπότε } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \sum_k \frac{z_k L(z_k)}{3}.$$

Αντικαθιστώντας $L(z_1) = L(e^{\frac{i\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3}$, $L(z_2) = L(-1) = \pi$, $L(z_3) = L(e^{\frac{5i\pi}{3}}) = \frac{5i\pi}{3}$ προκύπτει ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ίση με $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Με την παρακάτω πρόταση μας δίνεται η δυνατότητα για εφαρμογή των ολοκληρωτικών υπολοίπων στον υπολογισμό του αθροίσματος σειρών.

Πρόταση 4.8.10. Αν f μερόμορφη συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος πόλων $z_1, z_2, \dots, z_k$ με $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ τότε ισχύουν

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n \neq z_i, n=-N}^N f(n) = - \sum_i \text{Res}(\pi f(z) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, z_i)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n \neq z_i, n=-N}^N (-1)^n f(n) = - \sum_i \text{Res}(\pi f(z) \frac{1}{\sin \pi z}, z_i)$$

Παρατήρηση 4.8.5. Η επιλογή των συναρτήσεων $\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$, $\frac{1}{\sin \pi z}$ οφείλεται, όπως θα φανεί στην απόδειξη, στην ιδιότητά τους να έχουν ανώμαλα σημεία αποκλειστικά ακραίους αριθμούς σαν απλούς πόλους στους οποίους ισχύουν $\text{Res}(\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, n) = 1$ και $\text{Res}(\frac{1}{\sin \pi z}, n) = (-1)^n$.

Θα αναδείξουμε την σημασία της παραπάνω πρότασης στην ειδική περίπτωση που $f(z) = \frac{1}{z^{2k}}$, k φυσικός αριθμός στον υπολογισμό αθροισμάτων της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k}}$. Η δυνατότητα υπολογισμού αθροισμάτων της παραπάνω

μορφής εξαρτάται από “την υπομονή και το κουράγιο μας” να υπολογίζουμε με επαγωγικό τρόπο όρους των αναπτυγμάτων Laurent των συναρτήσεων $\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$, $\frac{1}{\sin \pi z}$ στο μηδέν. Επειδή οι παραπάνω συναρτήσεις είναι περιττές γράφονται σε αναπτυγματα Laurent της μορφής

$$\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{a_{-1}}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \dots, \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{b_{-1}}{z} + b_1 z + b_3 z^3 + \dots$$

οπότε

$$\frac{1}{z^{2k}} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{a_{-1}}{z^{2k+1}} + \dots + \frac{a_{2k-1}}{z} + \dots, \frac{1}{z^{2k}} \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{b_{-1}}{z^{2k+1}} + \dots + \frac{b_{2k-1}}{z} + \dots$$

και επομένως

$$a_{2k-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{2k}} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, 0\right), b_{2k-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{2k}} \frac{1}{\sin \pi z}, 0\right).$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την αρχική πρόταση έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} a_{2k-1} \text{ και } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} b_{2k-1}.$$

Για τον υπολογισμό του αναπτύγματος $\frac{1}{\sin w} = \frac{x_{-1}}{w} + x_1 w + x^3 w^3 + \dots$ έως και τον όρο τρίτης τάξης θέτουμε

$$1 = \left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \dots\right)(x_{-1} + x_1 w + x^3 w^3 + \dots) =$$

$$x_{-1} + w^2\left(x_1 - \frac{x_{-1}}{6}\right) + w^3\left(x_3 - \frac{x_1}{6} + \frac{x_{-1}}{120}\right) + \dots$$

οπότε

$$x_{-1} = 1, x_1 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{7}{360}, \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{\pi z}{6} + \frac{7\pi^3 z^3}{360} + \dots$$

και τελικά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \text{ και } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

Ομοίως

$$\frac{\cos w}{\sin w} = (1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{24} + \dots)(\frac{1}{w} + \frac{w}{6} + \frac{7w^3}{360} + \dots) = \frac{1}{w} - \frac{w}{3} - \frac{w^3}{45} + \dots$$

οπότε

$$\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \frac{\pi^3 z^3}{45} + \dots$$

και τελικά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Απόδειξη της πρότασης 4.8.10.

Για κάθε ακέραιο N θεωρούμε τη θετικά προσανατολισμένη τετραγωνική καμπύλη C_N με κορυφές $\pm(N + \frac{1}{2}) \pm i(N + \frac{1}{2})$. Με απλούς υπολογισμούς ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι $\frac{|\cos \pi z|}{|\sin \pi z|} < 2$. Επίσης επάνω στο ίχνο

ισχύει $|z| > N$ οπότε για αρκετά μεγάλα N ισχύει $|z| > N + \frac{1}{2} = \frac{\mu(C_N)}{8}$ οπότε για $N \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$|\int_{C_N} f(z) \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} dz| \leq 2\pi \max_{C_N} |f(z)| \mu(C_N) \leq 16\pi \max_{C_N} |zf(z)| \rightarrow 0.$$

Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{C_N} f(z) \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} dz &= 2\pi i \left(\sum_{n \neq z_i, n=-N}^N \text{Res}(f(z) \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, n) + \sum_i \text{Res}(f(z) \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, i) \right) = \\ &2\pi i \left(\sum_{n \neq z_i, n=-N}^N f(n) + \sum_i \text{Res}(f(z) \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, z_i) \right) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι μηδενίζεται το όριο για $N \rightarrow +\infty$ παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

Σχετικά με το δεύτερο σκέλος της πρότασης, από την σχέση $\frac{1}{\sin^2 \pi z} = 1 + \frac{\cos^2 \pi z}{\sin^2 \pi z}$ προκύπτει η ανισότητα $\frac{1}{|\sin \pi z|} < \sqrt{5}$. Στη συνέχεια ακολουθούμε πιστά την διαδικασία της απόδειξης του προηγούμενου σκέλους.

Παράδειγμα 4.8.14. Να υπολογιστούν τα αθρίσματα $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$,
 $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4}$.

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\cos \pi z}{(z^2 + 1) \sin \pi z}$ έχει απλούς πόλους τα σημεία $z_1 = 2i, z_2 = -2i$ έχουμε

$$2S_1 - \frac{1}{4} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = -\pi \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{(z^2 + 1) \sin \pi z}, z_k\right) = -\pi \sum_k \frac{\cos \pi z_k}{(2z_k) \sin \pi z_k}$$

ομοίως

$$2S_2 - \frac{1}{4} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = -\pi \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2 + 1) \sin \pi z}, z_k\right) = -\pi \sum_k \frac{1}{(2z_k) \sin \pi z_k}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\cos \pi z_1 = \cos 2\pi i = \frac{e^{-2\pi} + e^{2\pi}}{2} = \cos \pi z_2, \quad \sin \pi z_1 = \sin 2\pi i = \frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{2i} = -\sin \pi z_2$$

μετά την αντικατάσταση παίρνουμε

$$S_1 = \frac{\pi(e^{2\pi} + e^{-2\pi})}{4(e^{2\pi} - e^{-2\pi})} + \frac{1}{8} \text{ και } S_2 = \frac{\pi}{2(e^{2\pi} - e^{-2\pi})} + \frac{1}{8}.$$

4.8.2 Η απόδειξη Θεωρημάτων 4.8.1 και 4.8.2 και η γενικότερη σημασία τους.

Ας επαναλάβουμε την διατύπωσή τους.

Θεώρημα. 4.8.1 Θεωρούμε συνάρτηση f αναλυτική σε κλειστό δακτύλιο $\Delta[z_0, r, R]$,

$$\gamma_1(t) = z_0 + re^{it} \quad \gamma_2(t) = z_0 + Re^{it} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύουν.

$$1. \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

2. Αν a εσωτερικό σημείο του δακτυλίου τότε

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Θεώρημα 4.8.2. Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε δακτύλιο τότε αναπτύσσεται σε σειρά Laurent.

Θα αποδείξουμε πρώτα το δεύτερο θεωρώντας αληθές το πρώτο.

Απόδειξη θεωρήματος 4.8.2. Εφόσον η συνάρτηση $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ τότε όπως μάθαμε συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δακτυλίου της και το ανάπτυγμά της είναι μοναδικό όπως έχουμε αποδείξει σε προηγούμενο εδάφιο. Θεωρούμε τώρα την σχέση του προηγούμενου Θεωρήματος

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

εφαρμόζοντας πιστά την διαδικασία που ακολουθήσαμε στην ειδική περίπτωση που αφορούσε δίσκο και δυναμοσειρές έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ με } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία αναπτύσσοντας σε σειρά Laurent με κέντρο z_0 την συνάρτηση $1/(\zeta - z)$ στο εξωτερικό του μικρού δίσκου αξιοποιώντας την ανισότητα $(|\zeta - z_0|/|z - z_0|) < 1$ και το ανάλογο ανάπτυγμα που έχουμε δώσει σε προηγούμενο εδάφιο καταλήγουμε στο ανάπτυγμα Laurent

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ με } a_n = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Απόδειξη θεωρήματος 4.8.1.

Δίνουμε πρώτα έναν απλό τρόπο απόδειξης αλλά στη συνέχεια θα δώσουμε και έναν δεύτερο για να αναδείξουμε μια ιδιαίτερη σημαντική ιδέα που υπάρχει στην διαδικασία της. Αν έχουμε μια συνάρτηση $f(z)$ αναλυτική σε κλειστό δακτύλιο δηλαδή σε ανοικτό σύνολο O που τον περιέχει μπορούμε να θεωρούμε το O ανοικτό δακτύλιο $\Delta(z_0, r_1, R_1)$ με $r_1 < r < R < R_1$. Πράγματι επειδή ο κλειστός δακτύλιος είναι συμπαγές σύνολο η απόστασή του από το κλειστό σύνολο $\mathbb{C} - O$ είναι θετικός αριθμός ή $+\infty$ οπότε μπορούμε να θέσουμε $r_1 = r - \epsilon$, $R_1 = R + \epsilon$ όπου ϵ είναι θετικός μικρότερος της απόστασης.

Με τα παραπάνω δεδομένα θεωρούμε τυχόν a στο εσωτερικό του κλειστού δίσκου, δύο ημιευθείες με αρχή το z_0 που τέμνουν τον δακτύλιο στα ευθύγραμμα τμήματα $[z_1, w_1]$ και $[z_2, w_2]$

Τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα χωρίζουν το δακτύλιο σε δύο συλεκτικά μέρη. Παρατηρούμε ότι το σύνολο του κάθε μέρους περιέχεται σε κάποιον σκισμένο δακτύλιο οπότε το ολοκλήρωμα αναλυτικής συνάρτησης στο δακτύλιο υπεράνω της καμπύλης

$$[z_1, w_1] + [w_2, z_2] + \widehat{z_2 z_1} \text{ μηδενίζεται.}$$

$$\text{Ομοίως και υπεράνω της καμπύλης } [z_2, w_2] + w_2 w_1 + [w_1, z_1] + \widehat{z_1 z_2}$$

(Οι καμπύλες και στις δύο περιπτώσεις θεωρούνται προσανατολισμένες κατά την θετική φορά).

Θεωρούμε την συνάρτηση $(f(z) - f(a))/(z - a)$ που όπως μάθαμε επεκτείνονται αναλυτικά στο σημείο a και την ολοκληρώνουμε επάνω στις δύο καμπύλες. Αν αθροίσουμε τα ολοκληρώματα επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα αλληλοαναιρούνται και τελικά προκύπτει το παραπάνω Θεώρημα.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 4.8.1 με ευρύτερη σημασία.

Διαμερίζουμε τα διαστήματα $[r, R]$ και $[-\pi, \pi]$ σε ίσα διαστήματα με τις διαμερίσεις $r = s_0 < s_1 < \dots s_n = R$ και $-\pi = t_0 < t_1 < \dots t_n = \pi$ αντίστοιχα.

Αν $\Gamma(s, t) = z_0 + se^{it} : (s, t) \in [r, R] \times [-\pi, \pi]$, θεωρούμε τις καμπύλες $\tilde{\gamma}_k(t) = \Gamma(s_k, t)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Αν διαμερίσουμε τις $\tilde{\gamma}_0$ και $\tilde{\gamma}_1$ και στη συνέχεια συνενώσουμε τα σημεία $\tilde{\gamma}_0(t_k)$ και $\tilde{\gamma}_1(t_k)$ με τά αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα κατασκευάζουμε τις καμπύλες γ_{1k} , $k = 1, 2, \dots, n$ όπου

$$\tilde{\gamma}_{1k} = \tilde{\gamma}_1|[t_k, t_{k+1}] +^* [\tilde{\gamma}_1(t_{k+1}), \tilde{\gamma}_0(t_{k+1})] -^* \tilde{\gamma}_0|[t_k, t_{k+1}] +^* [\tilde{\gamma}_0(t_k), \tilde{\gamma}_1(t_k)].$$

Αν μια συνάρτηση ολοκληρώνεται επάνω σε όλες τις καμπύλες $\tilde{\gamma}_{1k}$ και αθροίσουμε τα ολοκληρώματα επειδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα συμμετέχει δύο φορές στην ολοκλήρωση με αντίθετες κατευθύνσεις, δίνει συνολική τιμή μηδέν οπότε,

$$\sum_{k=1}^n \int_{\tilde{\gamma}_{1k}} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz.$$

Επειδή ο κλειστός δακτύλιος είναι συμπαγής και το συμπλήρωμά του πεδίου ορισμού κλειστό και ξένο προς τον δακτύλιο η απόστασή τους είναι θετική. Αν a η παραπάνω απόσταση επειδή το πεδίο ορισμού της συνεχούς συνάρτησης Γ είναι συμπαγές θα είναι ομοιόμορφα συνεχής οπότε για $\epsilon = \frac{a}{4}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\Gamma(s, t) - \Gamma(s^*, t^*)| < \frac{a}{4} \text{ όταν } |s - s^*| < \delta \text{ και } |t - t^*| < \delta.$$

Αν πάρουμε τις αρχικές διαμερίσεις με λεπτότητα μικρότερη του δ ($s_{k+1} - s_k < \delta, t_{k+1} - t_k < \delta$) τότε ο αναγνώστης πολύ εύκολα μπορεί να αποδείξει ότι ο κύκλος με κέντρο $\tilde{\gamma}_1(t_k)$ και ακτίνα $\frac{a}{2}$ περικλείει στο εσωτερικό του που το ίχνος της καμπύλης $\tilde{\gamma}_{1k}$ και ότι το εσωτερικό του περιέχεται στο πεδίο ορισμού της αναλυτικής συνάρτησης. Επειδή ο ανοικτός δίσκος είναι κυρτός τόπος ισχύει $\int_{\tilde{\gamma}_{1k}} f(z)dz = 0$. Αθροίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη τον προηγούμενο τύπο του αθροίσματος παίρνουμε

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz. \text{ Συνεχίζοντας επαγωγικά αποδειχνουμε ότι}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)dz = \dots \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Παρατήρηση 4.8.6. Παρατηρώντας προσεκτικά την διαδικασία της απόδειξης διαπιστώνουμε ότι αν σε κάθε s αντιστοιχίσουμε την καμπύλη $\gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ η παραπάνω οικογένεια περιγράφει την διαδικασία της συνεχούς μεταμόρφωσης του πρώτου κύκλου στο δεύτερο χωρίς να ξεφύγει ούτε σε ένα σημείο από το ανοικτό σύνολο. Σε φυσική ορολογία την χρονική στιγμή s η αρχική καμπύλη έχει μετασχηματιστεί στην γ_s .

Ολο το σενάριο περιγράφεται πλήρως από την συνάρτηση $\Gamma(s, t)$. Το συμπέρασμά μας είναι ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή παραμένει σταθερό υπεράνω όλων των καμπύλων γ_s . Αν επιχειρήσουμε μια διασχευή όλου του παραπάνω σεναρίου παίρνοντας όχι κύκλους αλλά τυχούσα

συνεχή μεταμόρφωση κλειστών καμπύλων η προηγούμενη διαδικασία εφαρμόζεται χωρίς εμπόδια.

Θεώρημα 4.8.8. Θεωρούμε οικογένεια κλειστών καμπύλων $\gamma_s(t)$, $s \in [a, b]$, $t \in [c, d]$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $\Gamma(s, t) = \gamma_s(t)$ να είναι συνεχής στο $[a, b] \times [c, d]$, ανοικτό σύνολο O που να περιέχει όλα τα ίχνη των καμπύλων και f αναλυτική συνάρτηση στο O . Με τις παραπάνω προϋποθέσεις το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f παραμένει σταθερό υπεράνω όλων των καμπύλων γ_s .

Για την απόδειξη ο αναγνώστης δεν έχει παρά να επαναλάβει την διαδικασία της προηγούμενης απόδειξης για δακτύλιο που είναι έτσι γραμμένη ώστε να μην χρειαστεί να αλλάξει σχεδόν ούτε μία λέξη.

4.9 Θεωρήματα Cauchy σε ανοικτά σύνολα.

Γενικά.

Το μέχρι τώρα οικοδόμημα της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης αναλυτικών συναρτήσεων σε απλά συνεκτικούς τόπους έγινε με την ουσιαστική διαμεσολάβηση του δείκτη στροφής. Ο δείκτης στροφής, ένα απλό ολοκλήρωμα με άμεση απλή φυσική και γεωμετρική ερμηνεία, συνδέθηκε καταλυτικά με την τιμή επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων τυχούσας αναλυτικής συνάρτησης. Στη συνέχεια γνωρίσαμε την δυναμική αυτής της διαδικασίας να δραπετεύει από τούς απλά συνεκτικούς τόπους εισβάλλοντας και σε κάποια ανοικτά σύνολα με τρύπες, τους δακτυλίους και στη συνέχεια σε οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο με τη διαδικασία της ομοτοπίας με την οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αμετάβλητο στις συνεχείς μεταμορφώσεις της καμπύλης εντός του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Στην απλή περίπτωση που η κλειστή καμπύλη σε ανοικτό σύνολο έχει την ιδιότητα με συνεχείς μεταμορφώσεις της εντός ανοικτού συνόλου O να συρρικνώνεται σε σημείο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπεράνω της καμπύλης οποιασδήποτε αναλυτικής συνάρτησης στο O μηδενίζεται. Εποπτικά αυτό μας οδηγεί αυτόματα στον ισχυρισμό ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν τρύπες του ανοικτού συνόλου στο εσωτερικό της καμπύλης το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μηδενίζεται ή με άλλα λόγια στη διαπίστωση ότι τα ανοικτά σύνολα συμπεριφέρονται σαν απλά συνεκτικοί τόποι στην κλαση των κλειστών καμπύλων τους που

δεν περιλαμβάνουν τρύπα του συνόλου στο εσωτερικό τους ($n(\gamma, \mathbb{C} - \{O\}) = \{0\}$.) Τα παραπάνω συμπεκνώνονται με το παρακάτω παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.9.1. . (Θεώρημα Cauchy σε ανοικτό σύνολο .)

Αν $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο O , γ καμπύλη με το ίχνος της επάνω στο O με $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C} - O$ ισχύει

$$n(\gamma, z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots, z \in G - \gamma^*.$$

Αν η προϋπόθεση του δείκτη στροφής ισχύει για κάθε κλειστή καμπύλη και εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο για την συνάρτηση $f(z)(z-a)$ για $z = a, n = 0$ προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα υπεράνω κάθε κλειστής καμπύλης μηδενίζεται και ως εκτούτου κάθε αναλυτική συνάρτηση θα έχει παράγουσα. Από την παρατήρηση αυτή έχουμε το παρακάτω πόρισμα .

Πόρισμα 4.9.1. Ένα ανοικτό σύνολο είναι απλά συνεκτικό εάν και μόνο εάν όλες οι καμπύλες του δεν περιλαμβάνουν στο εσωτερικό τους σημεία που δεν ανήκουν σε αυτό , δηλαδή ο δείκτης στροφής όλων των σημείων που δεν ανήκουν στο σύνολο ως προς την καμπύλη είναι μηδέν.

Θα δώσουμε την απόδειξη και μία γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος αφού πρώτα το αξιοποιήσουμε στην μελέτη της τοπικής δομής αναλυτικών συναρτήσεων

4.9.1 Δείκτης στροφής και τοπική δομή αναλυτικών συναρτήσεων.

Αν έχουμε μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ θέτουμε το παρακάτω απλό στην διατύπωσή του φυσικό-γεωμετρικό ερώτημα. Αν ένα κινητό z κινούμενο κατά το δρομολόγιο μιας κλειστής καμπύλης γ κάνει κάποιο αριθμό στροφών γύρω από ένα σημείο z_0 πόσες στροφές κάνει η εικόνα του $f(z)$ γύρω από το $f(z_0)$. Σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα αν $w = f(z_0)$ δεν ανήκει στο ίχνος της καμπύλης $f(\gamma)$ να υπολογιστεί ο δείκτης $n(f(\gamma), w)$. Επειδή για τον δείκτη στροφής ισχύει

$$n(f(\gamma), w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dz}{z - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta,$$

γίνεται φανερό ότι στον υπολογισμό με την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων υπεισέρχονται τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $\frac{(f-w)'}{f-w}$, δηλαδή το πρόβλημα μας παραπέμπει στην εφαρμογή των ολοκληρωτικών υπολοίπων σε συναρτήσεις της μορφής f'/f .

Η διαχείριση του παραπάνω πηλίκου γίνεται ευκολότερη αν τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης f είναι πόλοι ή απαλείψιμα σημεία γι αυτό θα μελετήσουμε το πρόβλημα στις μερόμορφες συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής

Ορισμός 4.9.1. Ορίζουμε ότι μια συνάρτηση f είναι μερόμορφη σε ανοικτό σύνολο O αν κάθε σημείο $z \in O$

είναι ή σημείο αναλυτικότητας, ή απαλείψιμο ανώμαλο ή πόλος, δηλαδή αν αφαιρέσουμε από το O το σημεία του που είναι πόλοι ή απαλείψιμα σημεία της συνάρτησης στο υπόλοιπο σύνολο η συνάρτηση είναι αναλυτική.

Αν ένα σημείο a είναι ρίζα k τάξης σε συνάρτηση f , δηλαδή $f(z) = (z - a)^k g(z)$ με $g(a) \neq 0$ τότε

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Αν ένα σημείο a είναι πόλος k τάξης τότε στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε το k με $-k$. Με την παραπάνω διαδικασία μεταφερθήκαμε σε μια συνάρτηση g με μια ρίζα ή έναν πόλο λιγώτερο. Αν συμφωνήσουμε για πρακτικούς λόγους στο πλήθος των ριζών ή των πόλων να προσμετράμε και την τάξη (π.χ. μια ρίζα τρίτης τάξης θα μετράει για τρεις ρίζες) και εξαντλήσουμε την προηγούμενη διαδικασία για όλους τους πόλους και ρίζες καταλήγουμε στο παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 4.9.1. Αν $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_k$ είναι ρίζες και πόλους $p_1, p_2 \dots, p_n$ πόλοι μερόμορφης συνάρτησης $f(z)$ τότε

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{m=1}^k \frac{1}{z - \rho_m} - \sum_{m=1}^n \frac{1}{z - p_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

όπου g μερόμορφη συνάρτηση στο O χωρίς τις παραπάνω ρίζες και πόλους.

Το παραπάνω Λήμμα σε συνδυασμό με το θεώρημα του Cauchy για ανοικτά σύνολα μας οδηγούν σε έναν τύπο υπολογισμού του $\Delta \text{Arg}(f(\gamma), w) = 2\pi n(f(\gamma), w)$ με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.9.2. (Αρχή του ορίσματος) Θεωρούμε ανοικτό σύνολο O , και καμπύλη γ που το ίχνος και το εσωτερικό της περιέχονται στο O . ($n(\gamma, \mathbb{C} - O) = \{0\}$). Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $f(z) - w$ μερόμορφη στο O που δεν μηδενίζεται στο ίχνος της καμπύλης με ρίζες $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_k$ και πόλους $p_1, p_2 \dots, p_n$ στο εσωτερικό μιας καμπύλης (λαμβανομένης υπόψη και της πολλαπλότητας) . Με τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \text{Arg}(f(\gamma), w) = n(f(\gamma), w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{m=1}^k n(\gamma, \rho_m) - \sum_{m=1}^n n(\gamma, p_m).$$

Απόδειξη.

Με βάση το προηγούμενο Λήμμα έχουμε

$$n(f(\gamma), w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{m=1}^k n(\gamma, \rho_m) - \sum_{m=1}^n n(\gamma, p_m) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι $\int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$. Επειδή η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ δεν έχει μή απαλείψιμα ανώμαλα σημεία στο εσωτερικό της καμπύλης που περιέχεται στο O πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του Θεωρήματος Cauchy σε ανοικτά σύνολα, οπότε $\int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$.

Θεώρημα 4.9.3. (Γενικευμένη αρχή του ορίσματος .)

Αν εκτός από τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος θεωρήσουμε επιπλέον συνάρτηση h αναλυτική στο O τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(z)f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{m=1}^k n(\gamma, \rho_m)h(\rho_m) - \sum_{m=1}^n n(\gamma, p_m)h(p_m)$$

Η απόδειξη γίνεται με πολύ μικρές παρεμβάσεις στην απόδειξη της αρχής του ορίσματος και αφήνεται στον αναγνώστη.

Παρατηρήσεις 4.9.1.

1. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι απλά συνεκτικός τόπος η αρχή του ορίσματος ισχύει για κάθε καμπύλη του.

2. Αν οι δείκτες στροφής των ριζών και των πόλων της που βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης είναι ένα τότε ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \text{Arg}(f(\gamma), 0) = n(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f, \gamma) - P(f, \gamma)$$

όπου $N(f, \gamma)$ το πλήθος των ριζών και $P(f, \gamma)$ των πόλων της συνάρτησης στο εσωτερικό της καμπύλης.

Αν επί πλέον η συνάρτηση δεν έχει πόλους ο δείκτης στροφής $n(f(\gamma), 0)$ ταυτίζεται με το πλήθος των ριζών N . Καταρχήν αν έχουμε ένα αρκετά αξιόπιστο πρόγραμμα σχεδιασμού καμπύλων μπορούμε άμεσα από την γραφική παράσταση της καμπύλης $\Gamma = f(\gamma)$ να έχουμε μέσω του δείκτη στροφής της στο μηδέν ένα εποπτικό συμπέρασμα για τον αριθμό των ριζών στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γ . Ας φανταστούμε το σενάριο που η καμπύλη γ είναι το άνοιγμα μιας απόχης που μεγαλώνει ή μικραίνει και την περιφέρουμε στο O ψαρεύοντας ρίζες της f . Τον αριθμό των ριζών που έχουμε κάθε χρονική στιγμή εγκλωβίζει μας τον προδίδει με την εμφάνισή της η αντίστοιχη Γ μέσω του δελικτη στροφής της. Μικραίνοντας το άνοιγμα της απόχης μπορούμε να έχουμε καλύτερες προσεγγίσεις των ριζών αλλά δυσκολεύουμε το ψάρεμά τους. Τα παραπάνω βέβαια δεν ικανοποιούν αποδεκτές προϋποθέσεις μαθηματικής αυστηρότητας αλλά πολλές φορές είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για να “μαντέψουμε” που είναι οι ρίζες και στη συνέχεια με αυστηρό τρόπο να τις βρούμε. Το παραπάνω σενάριο προσφέρεται και για υψηλότερες προδιαγραφές μαθηματικής αυστηρότητας στην αριθμητική ανάλυση. Το πλήθος των ριζών στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε δίδεται από το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ και μάλιστα επειδή έχει πραγματική τιμή του που δίδεται από το αντίστοιχο πραγματικό ολοκλήρωμα. Επειδή γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα είναι ακέραιος ένας υπολογισμός με απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 0.5 δίδει ακριβές αποτέλεσμα για τον αριθμό των ριζών και αυτό αποτελεί σοβαρό μαθηματικό πλεονέκτημα.

Παράδειγμα 4.9.1. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου $f(z) = z^4 - 139z^3 + 4z^2 + 212z + 5$ που ανήκουν στο δεξιό ημιεπίσημο.

Καταρχήν για όλα τα σημεία $z = it$ που ανήκουν στο φανταστικό άξονα ισχύει $\operatorname{Re} f(z) = t^4 - 4t^2 + 5 > 0$.

Για $R > 0$ θεωρούμε την καμπύλη $\gamma_R = [iR, -iR] + C_R$,

$$C_R(t) = Re^{it}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

που προφανώς το εσωτερικό της βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο. Το πλήθος που ζητάμε επειδή είναι φυσικός αριθμός δίνεται από το $\lim_{R \rightarrow +\infty} n(f(\gamma_R), 0)$.

Επειδή οι τιμές της συνάρτησης f για τα σημεία του φανταστικού άξονα βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο που ορίζεται ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{[iR, -iR]} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} f(-iR) - \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} f(iR) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} \left(\frac{f(-iR)}{f(iR)} \right).$$

Επειδή $\frac{f(z)}{f(-z)} \rightarrow 1$ όταν $|z| \rightarrow +\infty$ έχουμε $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} \left(\frac{f(-iR)}{f(iR)} \right) = 0$.

Σχετικά με το ολοκλήρωμα υπεράνω της C_R αν λάβουμε υπόψη ότι

$\frac{zf'(z)}{f(z)} \rightarrow 4$ όταν $|z| \rightarrow +\infty$, για $R \rightarrow +\infty$ η συνάρτηση

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(Re^{it})}{f(Re^{it})} iRe^{it} dt]$$

έχει όριο $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4i dt = 2$.

Αθροίζοντας τα δύο προηγούμενα όρια βρίσκουμε το ζητούμενο πλήθος $\lim_{R \rightarrow +\infty} n(f(\gamma_R), 0) = 2$.

Παρατήρηση 4.9.1. Κάνοντας μια αναψηλάφηση στην απόδειξη του παραπάνω παραδείγματος και ελάχιστες παρεμβάσεις ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι οποιοδήποτε πολυώνυμο αρτίου βαθμού που το πραγματικό του μέρος δεν μηδενίζεται στον φανταστικό άξονα έχει τις μισές ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο και τις άλλες μισές στο αριστερό.

Μια σημαντική εφαρμογή της αρχής του ορίσματος ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό ριζών αποτελεί το παρακάτω Θεώρημα που στη βιβλιογραφία συναντιέται και σαν αρχή του Rouché.

Θεώρημα 4.9.4. (Θεώρημα Rouché).

Αν θεωρήσουμε f, g αναλυτικές συναρτήσεις σε κλειστό δίσκο $D[a, R]$ με την ιδιότητα $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε ζ στον κύκλο $C(a, R)$ τότε οι συναρτήσεις f και $f + g$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό του δίσκου (γράφουμε $N[f + g, D(a, R)] = N[f, D(a, R)]$).

Απόδειξη. Θέτουμε $\gamma = C(a, R)$. Η συνάρτηση

$$h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g(z) + f(z)}{f(z)}$$

είναι μερόμορφη σε ανοικτή περιοχή του δίσκου $D[a, R]$ οπότε

$$n(h(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = N(h, \gamma) - P(h, \gamma) = N(f + g, \gamma) - N(f, \gamma).$$

Από την ανισότητα της υπόθεσης έχουμε

$$\operatorname{Re} h(\zeta) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{g(\zeta)}{f(\zeta)} \right) \geq 1 - \frac{|g(\zeta)|}{|f(\zeta)|} > 0.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το ίχνος της καμπύλης $h(\gamma)$ βρίσκεται ολόκληρο στο δεξιό ημιεπίπεδο που σημαίνει ότι το μηδέν βρίσκεται στο εξωτερικό της δηλαδή

$$0 = n(h(\gamma), 0) = N(f + g, \gamma) - N(f, \gamma).$$

Παρατήρηση 4.9.2. Αν θέσουμε $F = f + g$ η αρχική υπόθεση γράφεται $|F(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$. Κρίσιμη για την απόδειξη ήταν η επισήμανση ότι το μηδέν βρίσκεται στο εξωτερικό της καμπύλης $\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)}$. Στο σημείο αυτό με μια απλή αλλά ιδιαίτερα έξυπνη παρατήρηση αποδείχτηκε ότι η παραπάνω προϋπόθεση ικανοποιείται με την σχέση $|F(\zeta) - f(\zeta)| < |F(\zeta)| + |f(\zeta)|$ στο ίχνος της καμπύλης που είναι ασθενέστερη από την προηγούμενη. Η απόδειξη στηρίζεται στην απλή παρατήρηση ότι η ισότητα $|w - 1| = |w| + 1$ επιτυγχάνεται εάν και

μόνο εάν $w \in \mathbb{R}$ και $w \leq 0$ οπότε η σχέση $|w - 1| < |w| + 1$ σημαίνει ότι το w δεν ανήκει στην ημιευθεία $[-\infty, 0]$. Με βάση αυτή τη διαπίστωση από την σχέση

$$\left| \frac{F(\zeta)}{f(\zeta)} - 1 \right| < \left| \frac{F(\zeta)}{f(\zeta)} \right| + 1$$

προκύπτει ότι το ίχνος της καμπύλης $\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)}$ δεν τέμνει την ημιευθεία $[-\infty, 0]$, το μηδέν βρίσκεται στην μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματός του δηλαδή στο εξωτερικό της καμπύλης οπότε $n(\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)}, 0) = 0$. Είναι τώρα φανερό η παρακάτω βελτίωση του Θεωρήματος Rouché

Θεώρημα 4.9.5. (Βελτιωμένο Θεώρημα Rouché). Αν θεωρήσουμε F, f αναλυτικές συναρτήσεις σε κλειστό δίσκο $D[a, R]$ με την ιδιότητα $|F(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)| + |F(\zeta)|$ για κάθε ζ στον κύκλο $C(a, R)$ τότε οι συναρτήσεις f και F έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό του δίσκου.

Παρατήρηση 4.9.3. Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rouché προκειμένου να βρούμε το πλήθος των ριζών μιας συνάρτησης F στο εσωτερικό πρέπει με βάση τα δεδομένα να επινοήσουμε την κατάλληλη f για την οποία το αντίστοιχο πρόβλημα είναι λυμένο και επιπλέον να ικανοποιεί το γνήσιο της ανισότητας. Το πλεονέκτημα είναι ότι η σύγκριση γίνεται μόνο επάνω στο ίχνος της καμπύλης. Σαν μια πρώτη εφαρμογή σκιαγραφούμε μια δεύτερη απόδειξη του βασικού Θεωρήματος της Αλγέβρας.

Αν $F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ επειδή $|\frac{F(z) - z^n}{z^n}| \rightarrow 0$ όταν $|z| \rightarrow +\infty$ για κάθε $R > R_0$ έχουμε $|F(z) - z^n| < |z^n|$ σε όλα τα σημεία του κύκλου $|z| = R$. Από το Θεώρημα Rouché προκύπτει ότι το πολυώνυμο F έχει το ίδιο πλήθος ριζών με την συνάρτηση z^n δηλαδή n .

Παράδειγμα 4.9.2. Βρείτε το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου $p(z) = z^{37} + 72z^{30} + z^2 + 68z + 1$ στους δίσκους $D(0, 1)$ και $D(0, 2)$.

Στον κύκλο $|z| = 1$ έχουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$|p(z) - 72z^{30}| \leq |z|^{37} + |z|^2 + 68|z| + 1 = 71 < |72z^{30}|.$$

Είναι τώρα φανερό ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rouché με συνάρτηση σύγκρισης την $72z^{30}$ στον μοναδιαίο δίσκο από το οποίο προκύπτει

ότι το πολυώνυμο έχει στο εσωτερικό του τον ίδιο αριθμό ριζών με το $72z^{30}$ δηλαδή 30 λαμβανομένης βέβαια πάντα υπόψη της πολλαπλότητας.

Για $|z| = 2$ έχουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$|p(z) - z^{37}| \leq 72|z|^{30} + |z|^2 + 68|z| + 1 = 72 \times 2^{30} + 2^2 + 68 \times 2 + 1 < 2^{37} = |z|^{37}.$$

Συνεχίζοντας όπως στην προηγούμενη περίπτωση βρίσκουμε ότι στο δίσκο $D(0, 2)$ περιέχονται και οι 37 ρίζες του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 4.9.3. Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε δίσκο $|z| < R$ με $R > 1$ και ισχύει $|f(z)| < 1$ όταν $|z| = 1$ να βρεθεί το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $F(z) = f(z) - z^n$ που βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου.

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(z) = -z^n$ τότε στον κύκλο $|z| = 1$ ισχύουν $|F(z) - g(z)| = |f(z)| < 1 = |g(z)|$. Με την εφαρμογή του θεωρήματος Rouché προκύπτει ότι το πλήθος των ριζών στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου είναι n .

Παράδειγμα 4.9.4. Αν $F(z) = z + b + ae^{-\lambda z}$ με $\lambda > 0$, $|a| < |Reb|$ να βρεθεί το πλήθος των ριζών της συνάρτησης F που βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Θεωρούμε την καμπύλη γ_R του παραδείγματος 4.9.1 και την $g(z) = z + b$ για συνάρτηση σύγκρισης.

Στον άξονα των φανταστικών αριθμών $z = it, t \in \mathbb{R}$) ισχύει

$$|F(z) - g(z)| = |a| < |Reb| < |it + b| = |z + b|.$$

Στην ημιπερίφεια C_R για αρκετά μεγάλο R ισχύουν

$$|F(z) - g(z)| = |a||e^{-\lambda z}| = |a|e^{-\lambda Re z} < |a| < R - |b| = |z| - |b| \leq |z + b|.$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rouché στην καμπύλη γ_R ελέγχοντας το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $z + b$ στο εσωτερικό της. Αν έχουμε κάποια ρίζα στο δεξιό ημιεπίπεδο θα ανήκει στο εσωτερικό όλων των γ_R για $R > R_0$ και θα είναι μοναδική. Τελικά αν το $-b$ ανήκει στο δεξιό ημιεπίπεδο έχουμε μία ρίζα και σε διαφορετική περίπτωση καμία.

Αν έχουμε δύο αναλυτικές συναρτήσεις που είναι “αρκετά κοντά” μεταξύ τους λογικό φαίνεται και οι ρίζες τους είναι “αρκετά κοντά μεταξύ τους”.

Αν κρατήσουμε σταθερά την μία και μεταβάλλουμε την άλλη ώστε να έρχονται όλο και πιο κοντά μεταξύ τους αναμένουμε και οι ρίζες να έρχονται πιο κοντά. Γενικά μικρές συνεχείς διαταραχές σε μια αναλυτική συνάρτηση επιφέρουν μικρές διαταραχές και στις ρίζες. Όλα τα παραπάνω που εισβάλλουν αυθόρμητα και δυναμικά στη σκέψη μας πάσχουν από ελλείμματα μαθηματικής αυστηρότητας αλλά μετά τη θεραπεία τους που γίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Rouché παίρνουν την μορφή του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 4.9.6. (Θεώρημα Hurwitz.)

Θεωρούμε ανοικτό σύνολο O , και καμπύλη γ που το ίχνος και το εσωτερικό της περιέχονται στο O . Θεωρούμε επίσης ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων $f_n(z)$ στο O που συγκλίνει στην $f(z)$ στα συμπαγή υποσύνολα του O και δεν έχει ρίζες στο ίχνος της καμπύλης. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις υπάρχει N ώστε για κάθε $n > N$ όλες οι συναρτήσεις f_n να έχουν το ίδιο πλήθος ριζών με την f στο εσωτερικό τις καμπύλης.

Ένα μικρό σχόλιο πριν την απόδειξη. Αν έχουμε εντοπίσει μία μεμονωμένη ρίζα της z_0 και με κέντρο αυτή πάρουμε ένα οσοδήποτε μικρό δίσκο με βάση το θεώρημα που διατυπώσαμε τελικά όλες οι συναρτήσεις f_n έχουν ρίζα στο δίσκο. Με άλλα λόγια η απαίτησή μας κάποια ρίζα της f_n να πλησιάζει όσο θέλουμε την z_0 ικανοποιείται αρκεί η f_n να είναι αρκετά κοντά στην f επί του συνόρου.

Απόδειξη. Καταρχήν το όριο $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση. Επειδή το $f(\gamma^*)$ είναι συμπαγές και η συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του γ^* υπάρχει το $m = \min |f(\gamma^*)| > 0$. Λαμβάνοντας υπόψη την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας στο ίχνος έχουμε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)| \text{ για κάθε } z \in \gamma^* \text{ και } n > N.$$

Είναι προφανές από την παραπάνω σχέση ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του Θεωρήματος Rouché που μας δίνει άμεσα το ζητούμενο συμπέρασμα.

Στην περίπτωση που έχουμε αναλυτικές συναρτήσεις σε τόπο προκύπτουν τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 4.9.2. Θεωρούμε ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων $f_n(z)$ σε τόπο OC χωρίς ρίζες σε αυτόν. Αν η ακολουθία συγκλίνει στην $f(z)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του τόπου OC , τότε είτε η συνάρτηση f είναι παντού μηδέν στον τόπο, είτε πουθενά μηδέν (είτε είναι η μηδενική είτε δεν έχει ρίζες).

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι η μηδενική και έχει ρίζα τότε η ως γνωστό η ρίζα είναι μεμονωμένο σημείο (εδώ χρειάστηκε τρόπος και όχι γενικά ανοικτό σύνολο) στο σύνολο των ριζών οπότε μπορούμε να βρούμε δίσκο $D[z_0, r] \subset OC$ στον οποίο είναι μοναδική. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Hurwitz στην καμπύλη $C(z_0, r)$ καταλήγουμε ότι τελικά συναρτήσεις f_n έχουν ρίζες στο εσωτερικό του δίσκου δηλαδή στο άτοπο.

Πόρισμα 4.9.3. Θεωρούμε ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων $f_n \rightarrow f$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τόπου OC . Αν η ακολουθία αποτελείται από $1-1$ συναρτήσεις τότε το όριο είναι είτε σταθερή συνάρτηση είτε $1-1$.

Απόδειξη.

Αν η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$ υπάρχουν δύο διαφορετικά z_1, z_2 με $f(z_1) = f(z_2) = a$. Θεωρούμε δύο κύκλους $C(z_1, r_1), C(z_2, r_2)$ που δεν τέμνονται και την ακολουθία $f_n - a$ που συγκλίνει στην $f - a$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του τόπου OC . Εφαρμόζοντας για την παραπάνω το θεώρημα Hurwitz στις καμπύλες $C(z_1, r_1)$ και $C(z_2, r_2)$ έχουμε ότι για $n > N$ κάθε συνάρτηση $f_n - a$ έχει ρίζες $w_1 \in D(z_1, r_1), w_2 \in D(z_2, r_2)$. Επειδή $f_n(w_1) = f_n(w_2) = a$ και f_n είναι $1-1$ έχουμε $w_1 = w_2$ που είναι άτοπο γιατί οι δίσκοι $D(z_1, r_1)$ και $D(z_2, r_2)$ έχουν επιλεγεί χωρίς κοινά σημεία.

Θεώρημα 4.9.7. Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε σημείο z_0 που είναι ρίζα τάξης m της συνάρτησης $f(z) - w_0$ τότε υπάρχουν δίσκος $D(w_0, a)$ και V_{z_0} ανοικτή περιοχή του z_0 ώστε $f(V_{z_0}) = D(w_0, a)$ και η συνάρτηση $f : V_{z_0} - \{z_0\} \rightarrow D(w_0, a)$ να είναι m προς 1 , δηλαδή κάθε $w \in D(w_0, a) - \{w_0\}$ θα είναι εικόνα m το πλήθος διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του $V_{z_0} - \{z_0\}$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση δεν είναι τοπικά σταθερή το σημείο z_0 , υπάρχει κλειστός δίσκος $D[z_0, r]$ που στο σύνορό του $C(z_0, r)$ ισχύει $f(z) \neq f(z_0)$ και κανένα σημείο του διάφορο του κέντρου δεν μηδενίζει την παράγωγο. Από την δεύτερη συνθήκη προκύπτει ότι κανένα σημείο του τρύπιου δίσκου στο κέντρο δεν αποτελεί πολλαπλή ρίζα σε συνάρτηση $f(z) - w$

Αν $\gamma = C(z_0, r)$ τότε επειδή το σημείο $w_0 = f(z_0)$ ανήκει στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} - f(\gamma)$ θα ανήκει ακριβώς σε ακριβώς μία ανοικτή συνεκτική συνιστώσα του H_{w_0} , οπότε υπάρχει $D(w_0, a) \subset H_{w_0}$. Όπως είναι γνωστό ο δείκτης

στροφής $n(f(\gamma), w)$ παραμένει αμετάβλητος σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος του ίχνους της καμπύλης οπότε $n(f(\gamma), w_0) = n(f(\gamma), w)$ για κάθε $w \in D(w_0, a)$. Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή του ορίσματος έχουμε

$$m = N(f - w_0, \gamma) = n(f(\gamma), w_0) = n(f(\gamma), w) = N(f - w, \gamma).$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι για κάθε $w \in D(w_0, a)$ η εξίσωση $f(z) = w$ έχει m το πλήθος λύσεις συνυπολογίζοντας και την πολλαπλότητα και επειδή για $w \neq w_0$ έχουμε μόνο απλές θα έχουμε ακριβώς m το πλήθος διακεκριμένες δηλαδή διαφορετικές ανά δύο. Για να περιέχονται πάντα οι τιμές της συνάρτησης στο δίσκο $D(w_0, a)$ περιορίζουμε την συνάρτηση στην ανοικτή περιοχή $V_{z_0} = f^{-1}(D(w_0, a))$ ικανοποιώντας έτσι το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Θεώρημα 4.9.8. (Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης)

1. Κάθε συνάρτηση αναλυτική σε ανοικτό σύνολο που δεν είναι τοπικά σταθερή σε κανένα σημείο είναι ανοικτή, δηλαδή μετασχηματίζει τα ανοικτά υποσύνολα του πεδίου ορισμού της σε ανοικτά υποσύνολα του επιπέδου.
2. Κάθε αναλυτική μη σταθερή συνάρτηση σε τόπο είναι ανοικτή.

Απόδειξη.

Αν G ανοικτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού θεωρώ τυχόν σημείο $w_0 \in f(G)$ οπότε το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι το w_0 είναι εσωτερικό σημείο του $f(G)$. Αν $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in G$ επειδή η συνάρτηση δεν είναι τοπικά σταθερή εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $D(w_0, a) = f(V_{z_0}) \subset f(G)$.

Το δεύτερο σκέλος είναι προφανές αν θυμηθούμε ότι μια συνάρτηση αναλυτική σε τόπο είναι τοπικά σταθερή σε ένα σημείο αν και μόνο εάν είναι σταθερή σε όλο τον τόπο.

Πόρισμα 4.9.4. Μια συνάρτηση $f(z)$ αναλυτική σε σημείο z_0 είναι τοπικά αμφιμονοσήμαντη σε αυτό εάν και εάν $f'(z_0) \neq 0$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση είναι τοπικά m προς 1 και το m καθορίζεται από την πολλαπλότητα της ρίζας z_0 στην συνάρτηση $f(z) - f(z_0)$ που με την σειρά της καθορίζεται από τις σχέσεις $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ και $f^{(k)}(z_0) = 0$ για $k < m$. Δεν αφήσαμε πολλά για τον αναγνώστη.

Παρατήρηση 4.9.4. Η έκφραση μια συνάρτηση είναι τοπικά αμφιμονοσήμαντη σε όλο το πεδίο ορισμού της ή τοπικά αμφιμονοσήμαντη παντού μπορεί

να μας παραπλανήσει και να θεωρήσουμε εσφαλμένα ότι η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη. Αναφέρουμε σαν παράδειγμα την συνάρτηση $f(z) = e^z$. Επειδή $f'(z) = e^z \neq 0$ σε όλο το επίπεδο είναι τοπικά αμφιμονοσήμαντη σε όλα τα σημεία του αλλά $f(z) = f(z + 2n\pi i)$ για οποιοδήποτε ακέραιο n . Σε πιο ελευθερη γλώσσα οι τιμές μιας συνάρτησης μπορεί να επαναλαμβάνονται όχι όμως πολύ γρήγορα (π.χ περιοδικές) οπότε οι τιμές δεν προλαβαίνουν να επαναληφθούν αν περιοριστούμε σε μικρές περιοχές.

Στην μελέτη της τοπικής δομής που κάναμε μέχρι τώρα αξιοποιήσαμε το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να περιοριστούμε όσο θέλουμε κοντά σε ένα σημείο. Στύβοντας το ακόμη μια φορά μπορούμε να βαθύνουμε ακόμη περισσότερο στην μελέτη μας όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.9.9. Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε σημείο z_0 που είναι ρίζα τάξης m της συνάρτησης $f(z) - w_0$ τότε υπάρχει δίσκος $D(z_0, a)$ ώστε $f(z) = w_0 + g^m(z)$ όπου g αναλυτική και $1 - 1$ στον δίσκο.

Απόδειξη.

Καταρχήν αν το z_0 είναι ρίζα τάξης m στην συνάρτηση $f(z) - w_0$ τότε $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m q(z)$ με $q(z_0) \neq 0$. Αν περιοριστούμε σε αρκετά μικρό δίσκο έχουμε $|q(z) - q(z_0)| < |q(z_0)|$ όταν $|z - z_0| < r$. Ρίχνοντας μια προσεκτική γεωμετρική ματιά στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι οι τιμές $g(z)$ περιέχονται στον ανοικτό δίσκο $D(q(z_0), |q(z_0)|)$. Επίσης παρατηρούμε ότι το μηδέν είναι στο εξωτερικό του δίσκου και επομένως μπορούμε να φέρουμε άπειρες ημιευθείες με αρχή το μηδέν στο εξωτερικό του δίσκου, οπότε οι τιμές ανήκουν σε κάποιο σκισμένο από ημιευθεία επίπεδο που ορίζεται ένας κλάδος $\text{Log}_a Z$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $h = e^{\frac{1}{m} \text{Log}_a q}$ οπότε $h^m = e^{\text{Log}_a q} = q$, δηλαδή η συνάρτηση h είναι ένας αναλυτικός κλάδος του $q^{\frac{1}{m}}$.

Αν θέσουμε $g(z) = (z - z_0)h(z)$ έχουμε $f(z) = f(z_0) + g(z)^m$. Από την σχέση $q(z_0) \neq 0$ έχουμε ότι $h(z_0) = g'(z_0) \neq 0$ οπότε η g είναι τοπικά αμφιμονοσήμαντη στο z_0 .

4.9.2 Σφαιρικό Θεώρημα Cauchy.

Προτού διατυπώσουμε το γενικώτερο θεώρημα θα δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.9.1 στην οποία περιέχονται και οι ιδέες της γενίκευσης.

Μια αναφληγή της διαδικασίας που ακολουθήσαμε για να φθάσουμε μέχρι εδώ μας οδηγεί για επανεκκίνηση στο σημείο της πρώτης συνάντησης του δείκτη της στροφής με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα τυχούσας αναλυτικής συνέρτησης σε κυρτό τόπο δηλαδή στην σχέση,

$$g(a) = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i n(\gamma, a) f(a), a \notin \gamma^*.$$

Η g στην παραπάνω μορφή της συνιστά στην γενική περίπτωση αναλυτική συνάρτηση έξω από το ίχνος της καμπύλης. Στην περίπτωση του κυρτού τόπου η συνάρτηση με την παρέμβαση του Λήμματος Coursat αποκαλύφθηκε σαν μηδενική και αυτό στη συνέχεια μας έδωσε σπουδαία αποτελέσματα. Στην επιδίωξή μας για κάτι ανάλογο στην γενική περίπτωση ανοικτού συνόλου O μπροστά μας υψώνεται σαν τείχος το ίχνος της καμπύλης που τεμαχίζει και περιφράσσει το $O - \gamma^*$ σε ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα τεμαχίζοντας με αυτό τον τρόπο και την συνάρτηση g σε επιμέρους αναλυτικές συναρτήσεις ξένες μεταξύ τους. Το πρώτο πρόβλημα που ανακύπτει είναι αν μπορούμε να γκρεμίσουμε το τείχος του ίχνους και να επεκταθούμε αναλυτικά σε όλο το σύνολο G και το δεύτερο να βρούμε τις ελάχιστες δυνατές προϋποθέσεις να μηδενίζεται παντού η παράσταση. Το τελευταίο αν το επιτυγχάναμε θα μας επέτρεπε να επαναλάβουμε άνετα την διαδικασία και να αναβαθμίσουμε τα προηγούμενα Θεωρήματα Cauchy σε ανοικτά σύνολα. Ξεκινάμε μια μαθηματική ακτινογραφία στην προηγούμενης διαδικασία με τα νέα εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας. Όπως αποδείξαμε αν θέσουμε

$$h(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, h(z, z) = f'(z)$$

η συνάρτηση h είναι αναλυτική ως προς την κάθε μεταβλητή ξεχωριστά.

Η συνάρτηση h θεωρούμενη ως συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι συνεχής ως προς τα ζεύγη (z, w) που δεν είναι διαγώνια και αν σταθεροποιήσουμε ένα w ο περιορισμός είναι συνεχής σε όλο το σύνολο O . Το εύλογο ερώτημα είναι αν η h σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της το προσπεράσαμε διότι κάθε φορά κινούσαμε την μία μεταβλητή σταθεροποιώντας την άλλη.

Θεωρώντας τις τιμές της h στο διαγώνιο σύνολο έχουμε μια αντίστοιχη επέκταση της $g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dw$ σε ολόκληρο το ανοικτό σύνολο στην

$g(z) = \int_{\gamma} h(w, z)dw$. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η επέκταση g ρίχνει τα τείχη του ίχνους της καμπύλης, δηλαδή αν είναι αναλυτική σε όλο το O . Εδώ τα νέα είναι ευχάριστα και μάλιστα χωρίς να χρειαστεί η μεσολάβηση του δείκτη στροφής.

Λήμμα 4.9.2. Αν $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο O ,

$$h(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, h(z, z) = f'(z), z, w \in O,$$

γ κλειστή καμπύλη με το ίχνος της επάνω στο O και

$$g(z) = \int_{\gamma} h(z, w)dw,$$

τότε η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο G .

Η απόδειξη θα γίνει στο τέλος του εδαφίου.

Στη συνέχεια με μια απλή αλλά ιδιαίτερα έξυπνη διαμεσολάβηση του δείκτη στροφής χωρίς να χρειαστεί καμία επιπλέον προϋπόθεση η συνάρτηση “δραπετεύει” από το πεδίο ορισμού της και επεκτείνεται σε όλο το εξωτερικό της καμπύλης

Πρόταση 4.9.1. Η συνάρτηση g του προηγούμενου θεωρήματος επεκτείνεται αναλυτικά στο ανοικτό σύνολο $O \cup O_1$, $O_1 = \{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) = 0\}$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $O_1 \cap O$. Η συνάρτηση g στο προηγούμενο σύνολο παίρνει την τιμή $g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι η συνάρτηση $\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \gamma^*$ επομένως και στο ανοικτό σύνολο O_1 .

Για να μπορούμε να επεκταθούμε αναλυτικά σε όλο το μιγαδικό επίπεδο αναδειχнется τώρα σαν αναγκαία η προϋπόθεση η καμπύλη να μην έχει τρύπες στο εσωτερικό της, διότι από την σχέση $n(\gamma, \mathbb{C} - O) = \{0\}$ έχουμε $O \cup O_1 = \mathbb{C}$

Ενώ σε πρώτη ματιά φαίνεται να χρειαζόμαστε και νέα προϋπόθεση για να επιτύχουμε τον μηδενισμό της ακέραιας συνάρτησης αλλά δεν θα χρειαστεί γιατί το θεώρημα του Liouville της αφαιρεί το πέπλο αποκαλύπτοντας τη σαν μηδενική.

Απόδειξη του Θεωρήματος . Από την υπόθεση ότι σε ολό το συμπλήρωμα του G παίρνουμε δείκτη στροφής μηδεν προκύπτει ότι η επέκταση της συνάρτησης του προηγούμενου θεωρήματος γίνεται σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο δηλαδή η αναλυτική επέκταση είναι ακεραία συνάρτηση. Αν πάρουμε την τιμή στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}_\infty - \gamma^*$ αυτή είναι $g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dz$. Επειδή $g(z) \rightarrow 0$ όταν $z \rightarrow \infty$ η ακεραία συνάρτηση είναι και φραγμένη, οπότε από το θεώρημα Liouville και το μηδενικό όριο στο άπειρο προκύπτει ότι θα είναι η μηδενική. Από τον τύπο της στο $G - \gamma^*$ έχουμε

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}, n = 0, 1, 2, \dots, z \in G - \gamma^*.$$

Επειδή μπορούμε να παραγωγίζουμε εισάγοντας την παράγωγο εντός του ολοκληρώματος όπως έχουμε αποδείξει στην διαδικασία των κυρτών συνόλων, παραγωγίζοντας διαδοχικά παίρνουμε τον ζητούμενο τύπο.

Χωρίς μεγάλες παρεμβάσεις μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο θεώρημα για περισσότερες καμπύλες δίδοντας την παρακάτω μορφή.

Θεώρημα 4.9.10. (Σφαιρικό θεώρημα Cauchy).

Αν $f(z)$ Αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο G , $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, m$ καμπύλες με το ίχνος τους επάνω στο G και $\sum_{k=0}^m n(\gamma_k, z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C} - G$, τότε

$$\sum_{k=0}^m n(\gamma_k, z)f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^m \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots, z \in G - \gamma^*.$$

Η απόδειξη προκύπτει ακολουθώντας πιστά την διαδικασία του προηγούμενου θεωρήματος, θεωρώντας σαν O το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ικανοποιούν την σχέση $\sum_{k=0}^m n(\gamma_k, z) = 0$. και $g(z) = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} h(w, z)dw$. Το ότι το O είναι ανοικτό αιτιολογείται ως εξής. Αν θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο $z_0 \in O$ επειδή η συνάρτηση δείκτης στροφής είναι τοπικά σταθερή για κάθε καμπύλη γ_k υπάρχει περιοχή $D(z_0, r_k)$ που $n(\gamma_k, z_0) = n(\gamma_k, z)$ επάνω σε αυτή. Αν πάρουμε την τομή όλων των παραπάνω περιοχών $D(z_0, r)$ είναι

φανερό ότι το άθροισμα των δεικτών στροφής στον δίσκο μηδενίζεται, δηλαδή $D(z_0, r) \subset O$. Το υπόλοιπο μέρος αφήνεται στον αναγνώστη.

Παρατηρήσεις 4.9.2. Το σφαιρικό θεώρημα γενικεύει όλες τις μορφές του θεωρήματος του Cauchy που συναντήσαμε μέχρι τώρα. Ένα σημαντικό στοιχείο που πρέπει να κρατήσουμε είναι ότι τα ανοικτά σύνολα στις κλειστές καμπύλες που μηδενίζεται ο δείκτης στροφής της τους στο συμπλήρωμά του, δηλαδή το εσωτερικό τους περιέχεται στο σύνολο συμπεριφέρονται σε αυτές σαν απλά συνεκτικοί τόποι. Αν επιστρέψουμε λίγο πίσω αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα θεωρήματα που ισχύουν στους απλά συνεκτικούς τόπους για όλες τις καμπύλες να εφαρμόζονται και στα ανοικτά επιλεκτικά όμως για εκείνες που πληρούν την προϋπόθεση του δείκτη στροφής. Π.χ θεώρημα Residues. Ενδιαφέρον είναι επίσης το γεγονός ότι ενώ στην υπόθεση μπαίνουν δείκτες στροφής σημείων που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού στο συμπέρασμα μπαίνουν δείκτες στροφής των σημείων που ανήκουν. Αυτό δείχνει πόσο σημαντική ήταν η “έξοδοσ” από το πεδίο ορισμού με την αναλυτική επέκταση. Ο αποδεικτικός δρόμος που ακολουθήσαμε δεν ήταν προσβάσιμος προτού αποκτήσουμε τα εργαλεία των κυρτών τόπων. Ακόμη και αν είμαστε αρκετά “ιδιοφυείς” και ξεπερνούσαμε τα αρχικά εμπόδια θα μας άναβε κόκκινο στο σημείο που χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Liouville. Το γεγονός ότι αυτή η απόδειξη έγινε πολύ πρόσφατα (Το 1971 από τον) δείχνει ότι σχετικά απλή παρουσίαση που δώσαμε στο θέμα για λόγους διδακτικούς έγινε δυνατή με το πλεονέκτημα της επιλεκτικής αξιοποίησης της έτοιμης δουλειάς πολλών ερευνητών που είχαμε στη διάθεσή μας. Πως άλλωστε να συμπτύξεις δουλειά εκατονταετιών σε τρεις σελίδες. Καιρός όμως για χειρωνακτική εργασία προκειμένου να αποδείξουμε το Λήμμα 4.9.2

Λήμμα 4.9.3. Αν G ανοικτό σύνολο, γ καμπύλη του επιπέδου, $F(z, w)$, $z \in G, w \in \gamma^*$ συνάρτηση συνεχής ως προς (z, w) στο $G \times \gamma^*$ και αναλυτική ως προς z με την παράγωγο ως προς z συνεχή συνάρτηση ως προς (z, w) , τότε η συνάρτηση $g(z) = \int_{\gamma} F(z, w)dw$ είναι αναλυτική στο G και ισχύει $g'(z) = \int_{\gamma} F_z(z, w)dw$.

Απόδειξη. Αν $U(z, w) = \operatorname{Re} F(z, w)$, $z_0 = x_0 + iy_0, z = (x_0 + iy)$ τότε από το θεώρημα μέσης τιμής του απειροστικού $U(z, w) - U(z_0, w) = (x - x_0)U_x(z^*, w)$ οπότε

$$\frac{\int_{\gamma} U(z, w)dw - \int_{\gamma} U(z_0, w)dw}{(x - x_0)} = \int_{\gamma} U_x(z^*, w)$$

για $x \rightarrow x_0$ έχουμε $z^* \rightarrow z_0$, $U_x(z^*, w) \rightarrow U_x(x_0, w)$ και

$$(\text{εδώ θα χρειαστούν κάποιες εξηγήσεις}) \int_{\gamma} U_x(z^*, w) \rightarrow \int_{\gamma} U_x(z_0, w),$$

$$\text{δηλαδή } \frac{\partial}{\partial x} \int_{\gamma} U(z, w) dw = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} U(z, w) dw.$$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία με το $U(z, w) = \operatorname{Re} F(z, w)$ καταλήγουμε στην σχέση $g_x(z) = \int_{\gamma} F_x(z, w) dw$ και ομοίως αποδείχνουμε $g_y(z) = \int_{\gamma} F_y(z, w) dw$.

Οι συνθήκες C-R $F_x = -iF_y$ δίνουν ανάλογες σχέσεις $g_x = -ig_y$. Από την συνέχεια των συναρτήσεων F_x, F_y προκύπτει η συνέχεια των g_x, g_y (εδώ επίσης χρειάζονται κάποιες εξηγήσεις), οπότε η συνάρτηση g είναι αναλυτική. Αντικαθιστώντας την μερική παράγωγο ως προς x με την παράγωγο ως προς z παίρνουμε το ζητούμενο. Δίνουμε τις εξηγήσεις ξεχωριστά για να τονίσουμε τον καθοριστικό ρόλο της ομοιόμορφης συνέχειας στα συμπαγή υποσύνολα. Καταρχήν το w μεταβάλλεται επάνω στο ίχνος της καμπύλης γ που είναι συμπαγές σύνολο. επίσης μπορούμε να περιορίσουμε το z σε κλειστό δίσκο κοντά διάστημα κοντά στο z_0 .

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon)$ (εδώ τονίζουμε ότι επειδή η συνέχεια στα συμπαγή είναι ομοιόμορφη το $\delta(\epsilon)$ μπορεί να επιλεγεί ενιαίο για όλα τα w) ώστε $|U_x(z, w) - U_x(z_0, w)| < \epsilon$ όταν $|z - z_0| < \delta$ για κάθε $w \in \gamma^*$, οπότε όταν $|x - x_0| < \delta$ ισχύει

$$\left| \int_{\gamma} U_x(z^*, w) dw - \int_{\gamma} U_x(z_0, w) dw \right| \leq \int_{\gamma} |U_x(z^*, w) - U_x(z_0, w)| |dw| \leq \epsilon \mu(\gamma)$$

οπότε για $x \rightarrow x_0$ ισχύει $\int_{\gamma} U_x(z^*, w) \rightarrow \int_{\gamma} U_x(z_0, w)$. Ο επόμενες εξηγήσεις δεν θα χρειαστούν διότι είναι του ίδιου χαρακτήρα με τις προηγούμενες.

Λήμμα 4.9.4. Αν $f(z)$ Αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο G και $h(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$, $h(z, z) = f'(z)$, $z, w \in G$,

τότε οι συναρτήσεις h και $\frac{\partial}{\partial z} h(z, w)$ είναι συνεχείς στο $G \times G$.

Απόδειξη.

Αν ένα ζεύγος δεν είναι διαγώνιο τότε υπάρχει ολόκληρη περιοχή του χωρίς διαγώνια στοιχεία στην οποία προφανώς ισχύουν τα συμπεράσματα του λήμματος. Αν θεωρήσουμε ένα διαγώνιο στοιχείο (z_0, z_0) και κλειστό δίσκο $D[z_0, r] \subset G$ τότε για κάθε

$$z, w \in D[z_0, r] \text{ ισχύει } h(z, w) = \int_0^1 f'(tw + (1-t)z) dt.$$

Χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f' και εφαρμόζοντας την γνωστή μας ανισοτική διαδικασία των διαφορών προκύπτει η συνέχεια της h στο διαγώνιο στοιχείο (z_0, z_0) .

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f'(tw + (1-t)z)$ ως προς τις μεταβλητές (t, z) διαπιστώνουμε ότι πληρούνται η προϋποθέσεις του προηγούμενου λήματος οπότε η συνάρτηση $h(z, w)$ είναι αναλυτική ως προς z στην συγκεκριμένη περιοχή και ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial z} h(z, w) = \int_0^1 (1-t) f''(tw + (1-t)z) dt$$

Η συνέχεια της $\frac{\partial}{\partial z} h(z, w)$ στο (z_0, z_0) προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη σχέση αξιοποιώντας με τον γνωστό μας τρόπο την ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης $(1-t)f''(tw + (1-t)z)$ ως προς (z, w, t) στο συμπαγές $D[z_0, r] \times D[z_0, r] \times \gamma^*$.

Απόδειξη του Λήματος 4.9.2.

Από το Λήμμα 4.9.4 προκύπτει ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το Λήμμα 4.9.3 στην συνάρτηση $h(z, w)$. Το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης είναι προφανές.

4.10 Σχεδόν λυμένες ασκήσεις επανάληψης

1. Αποδείξτε ότι $|z| \leq |z|^2 + |z-1|$ $z \in \mathbb{C}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Λύση. Για $|z| \leq 1$ έχουμε $|z|^2 + |z-1| \geq |z|^2 + |z| - 1 \geq |z|$.

Για $|z| > 1$ έχουμε $|z| < |z|^2 \leq |z|^2 + |z-1|$.

(Εξηγείστε γιατί έχουμε ισότητα μόνο στην περίπτωση $z = 1$.)

2. Αν ρ ρίζα του πολωνύμου $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0$, αποδείξτε ότι $|\rho| < 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|$.

Λύση.

Αν $|\rho| > 1$ έχουμε

$$|\rho| = \left| \frac{a_{n-1}}{\rho} + \frac{a_{n-2}}{\rho^2} + \dots + \frac{a_0}{\rho^{n-1}} \right| \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|.$$

3. Υπολογίστε τα

$$\max_{|z| \leq 1} \frac{|z^3 - 2|}{|z^3 + 2|} \text{ και } \min_{|z| \leq 1} \frac{|z^3 - 2|}{|z^3 + 2|}.$$

Λύση.

Με βάση τις ιδιότητες των μέτρων έχουμε

$$\frac{|z^3 - 2|}{|z^3 + 2|} \leq \frac{|z|^3 + 2}{2 - |z|^3} \leq \frac{3}{1}.$$

Στο σημείο αυτό κάποιοι σταματούν νομίζοντας ότι έχουν τελειώσει με το να βρουν άνω φράγμα χωρίς να αποδείξουν ότι αποτελεί και τιμή της συνάρτησης. Στην περίπτωση μας το άνω φράγμα 3 αποτελεί τιμή της συνάρτησης για $z = -1$ οπότε είναι η μεγίστη τιμή. Δουλέψτε ανάλογα για το ελάχιστο.

4. Θεωρούμε $z, w \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) > 0$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = |x - z| + |x - w|$, $x \in \mathbb{R}$ και την πραγματική ρίζα της εξίσωσης $|x - \bar{z}| + |x - w| = |\bar{z} - w|$.

Λύση.

Κάποιος με ιδιαίτερες ευαισθησίες στην ευκλείδεια γεωμετρία θα αναγνώριζε στη γλώσσα της το ακόλουθο ισοδύναμο πρόβλημα.

Αν μας δοθούν δύο σημεία Z, W στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας να ευρεθεί σημείο X της ευθείας που καθιστά το άθροισμα αποστάσεων από τα Z, W ελάχιστο.

Για την κατασκευή θεωρούμε το συμμετρικό W^* του W ως προς την ευθεία οπότε για κάθε σημείο X της ευθείας ισχύει $XW = XW^*$ και $XW + XZ = XW^* + XZ \leq W^*Z$. Είναι τώρα προφανές ότι έχουμε ισότητα αν θεωρήσουμε X το σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος W^*Z με την ευθεία.

“Μεταφράζουμε” τα παραπάνω σε μιγαδική γλώσσα. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x = \bar{x}$ και

$$|x - w| + |x - z| = |x - \bar{w}| + |z - x| \geq |z - \bar{w}|.$$

Αν μπορούσαμε για κατάλληλο x να επιτύχουμε ισότητα στην παραπάνω ανισότητα τότε η ζητούμενη ελάχιστη τιμή θα ήταν $|z - \bar{w}|$. Είναι γνωστό

ότι η τριγωνική ανισότητα γίνεται ισότητα στην περίπτωση που $z - x = t(x - \bar{w}), t \geq 0$ δηλαδή $Re z - x = t(Re x - Re \bar{w}), Im z = t Im \bar{w}$ με $t \geq 0$, οπότε ικανοποιείται η σχέση με $t = \frac{Im z}{Im \bar{w}} > 0$.

Τελικά παίρνουμε ως ελάχιστη τιμή το $|z - \bar{w}|$ για $x = \frac{Re z + t Re \bar{w}}{t+1}$ με $t = \frac{Im z}{Im \bar{w}}$. Η παραπάνω τιμή του x αποτελεί προφανώς και την ζητούμενη λύση της εξίσωσης του προβλήματος.

5. Αν $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ και n φυσικός αριθμός αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = r$ ώστε $|a + bz^n| > |a|$.

Λύση.

Θέτουμε $a = |a|e^{it_1}, t_1 = \arg a$, ομοίως $b = |b|e^{it_2}, z = re^{it}$ οπότε

$$|a + bz^n| = ||a|e^{it_1} + |b|e^{it_2}r^n e^{int}| = ||a| + |b|r^n e^{i(nt+t_2-t_1)}|$$

Αν πάρουμε t με $nt + t_2 - t_1 = 0$ παίρνουμε την τιμή $|a| + |b|r^n$ που είναι η μεγίστη δυνατή τιμή για $|z| = r$ και ικανοποιεί την απαίτηση του προβλήματος. (Αν πάρουμε t με $nt + t_2 - t_1 = \pi$ παίρνουμε την ελάχιστη τιμή $||a| - |b|r^n|$).

6. Υπολογίστε τα

$$w = (1 + i\sqrt{3})^{24}, Re w, Im w, X(w, \infty).$$

Λύση.

Αν $z = 1 + i\sqrt{3}$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $z^2 = -2\bar{z}$ οπότε $z^3 = -2\bar{z}z = -2|z|^2 = -8$,

$$w = (z^3)^8 = 8^8 \text{ και } X(w, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|w|^2}} = \dots$$

(Επιλύστε το αρχικό ερώτημα με την χρήση τριγωνομετρικής έκφρασης)

7. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα:

- $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) = 1\}$,
- $B = \{\frac{1}{z} : Re(z) \leq -1\}$
- $C = \{z \in \mathbb{C} : Re(\bar{z}) = Re(i\bar{z})\}$,

Λύση.

Για το σύνολο A ανατρέξτε στην αναλυτική γεωμετρία για την γραμμή $x^2 - y^2 = 1$.

Για το σύνολο B χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του σώματος των μιγαδικών αριθμών έχουμε διαδοχικά τις σχέσεις

$$Z = \frac{1}{z}, z = \frac{1}{Z}, \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \frac{1}{Z} = \operatorname{Re} \frac{\bar{Z}}{|Z|^2},$$

$$\operatorname{Re} \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} \leq 1, |Z|^2 - 2\operatorname{Re}(\frac{1}{2}\bar{Z}) \leq 0, |Z - \frac{1}{2}|^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Είναι τώρα προφανές ότι στο σύνολο απαρτίζεται από τον κλειστό δίσκο $D[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(Ξαναλύστε το πρόβλημα μετατρέποντάς το σε πρόβλημα αναλυτικής γεωμετρίας.)

Το σύνολο C περιγράφεται από την ευθεία $x + y = 0$.

8. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο που δίδεται από την εξίσωση

$$|z|^2 + 5\operatorname{Re}(z) + 3\operatorname{Im}(z) + d = 0, \text{ για τις διάφορες τιμές του } d \in \mathbb{R}.$$

Λύση.

Μετατρέποντας το πρόβλημα σε αναλυτικής γεωμετρίας έχουμε την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 5x + 3y + d = 0 \text{ ή } (x + \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{34}{4} - d.$$

Από την παραπάνω μορφή προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις.

Αν $\frac{34}{4} - d < 0$ το σύνολο είναι κενό.

Αν $\frac{34}{4} - d < 0$ έχουμε μονοσύνολο με στοιχείο το $z = (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2} - i\frac{3}{2}$

και για $\frac{34}{4} - d > 0$ έχουμε τον κύκλο κέντρου $K = (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2} - i\frac{3}{2}$

και ακτίνας $R = \sqrt{\frac{34}{4} - d}$.

Η αντιμετώπιση μπορεί να γίνει με την άλγεβρα των μιγαδικών. Πιο συγκεκριμένα η αρχική εξίσωση γίνεται

$$|z|^2 + \operatorname{Re}(z(5 + 3i)) + \frac{|5 + 3i|^2}{4} = \frac{|5 + 3i|^2}{4} - d$$

ή

$$|z + \frac{5+3i}{2}|^2 = \frac{34}{4} - d \text{ και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.}$$

9. Βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων

$$z^4 = 2^4, z^{2001} = 1, 1 + z + z^2 + \dots + z^{2000} = 0, e^z = 1 + i.$$

Λύση.

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε λύσεις

$$z_k = \sqrt[4]{2^4} e^{\frac{2k\pi i}{4}}, k = 0, 1, 2, 3 \text{ ή}$$

$$z_0 = 2, z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = 2e^{i\pi} = 2i, z_3 = 2e^{i3\pi} = -z_1.$$

Για την δεύτερη έχουμε ρίζες $z_k = e^{\frac{2\pi i k}{2001}}$, $k = 0, 1, 2 \dots 2000$.

Για την τρίτη αν πολλαπλασιάσουμε με $z - 1$ παίρνουμε την εξίσωση $z^{2001} = 1$. την λύνουμε όπως την προηγούμενη αλλά εξαιρούμε την λύση $z_0 = 1$.
Για την τέταρτη οι λύσεις δίνονται από το σύνολο

$$\log(1+i) = \text{Log}|1+i| + i\text{Arg}(1+i) + 2k\pi i, k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm \dots =$$

$$\frac{\text{Log}|2|}{2} + \frac{i\pi}{4} + 2k\pi i, k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm \dots$$

10. Δείξτε γεωμετρικά ότι $e^{\frac{z+1}{z-1}} \in D(0,1)$ για κάθε $z \in D(0,1)$.

Λύση.

Το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης ταυτίζεται με της συνάρτησης e^{-Z} , $\text{Re}Z \geq 0$ το οποίο θα βρούμε. Η εξίσωση $e^{-Z} = w, w \neq 0$ δίνει $Z = -\text{Log}|w| - i\text{arg}w$. Η σχέση $\text{Re}Z \geq 0$ ισοδυναμεί με $\text{Log}|w| < 0$ ή $w \in D(0,1) - \{0\}$.

11. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z) = e^{iz+1}$ στο σύνολο $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < 1\}$.
(a) Είναι η f 1-1 στο Ω ;
(b) Βρείτε την εικόνα $f(\Omega)$.

Λύση.

Από την εξίσωση $w = e^{iz+1}$ προκύπτει σύνολο λύσεων

$$iz+1 = \log(w) = \text{Log}|w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i \text{ ή } z = -i\text{Log}|w| + \text{Arg}w + 2k\pi - 1.$$

Ο περιορισμός $-1 < \text{Im}z < 1$ ισοδυναμεί με $-1 < -\text{Log}|w| < 1$ ή $e^{-1} < |w| < e^1$ που σημαίνει ότι το σύνολο τιμών είναι ο δακτύλιος $\Delta(0, e^{-1}, e^1)$.
(

Επειδή η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις για οποιοδήποτε w στον δακτύλιο η συνάρτηση δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

12. Βρείτε την εικόνα του συνόλου μεσω της δοσμένης συνάρτησης στις περιπτώσεις

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -1, 0 \leq y \leq \pi\}, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z}.$$

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -1\}, \quad g(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Λύση.

Η σχέση

$$Z = X + iY = \frac{1-z}{1+z}$$

μετά τις πράξεις δίδει

$$z = x + iy = \frac{1-Z}{1+Z} \text{ ή } x = \frac{1-X^2-Y^2}{(1+X)^2+Y^2}, y = \frac{-2Y}{(1+X)^2+Y^2}.$$

Ο περιορισμός $x \geq -1$ αντιστοιχεί στο κλειστό ημιεπίπεδο $X \leq 1$, ο περιορισμός $y \geq 0$ αντιστοιχεί στο κλειστό ημιεπίπεδο $Y \leq 0$ και ο περιορισμός $y \geq \pi$ αντιστοιχεί στο $(1+x)^2 + (y - \frac{1}{pi})^2 \geq \frac{1}{pi^2}$ δηλαδή στο $\mathbb{C} - D(1 + \frac{1}{pi}, \frac{1}{pi})$. Η ζητούμενη εικόνα ταυτίζεται με την τομή των παραπάνω συνόλων.

Το δεύτερο ερώτημα τώρα διαμορφώνεται στην εύρεση του $\{Z = e^w : \operatorname{Re} w \leq 1\}$. Από τη λύση της εξίσωσης προκύπτει

$w = \operatorname{Log}|Z| + i \arg Z$ και ο περιορισμός $\operatorname{Re} w \leq 1$ ισοδυναμεί με $0 < |Z| < e$.

13. Αποδείξτε ότι $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})$

Λύση.

$$|\cos z|^2 = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right|^2 = \frac{|e^{iz}|^2 + |e^{-iz}|^2 + 2\operatorname{Re}(e^{iz}\overline{e^{-iz}})}{4},$$

$$|\sin z|^2 = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right|^2 = \frac{|e^{iz}|^2 + |e^{-iz}|^2 - 2\operatorname{Re}(e^{iz}\overline{e^{-iz}})}{-4}.$$

Αθροίζοντας παίρνουμε την ποσότητα $\frac{|e^{iz}|^2 + |e^{-iz}|^2}{2}$.

Αλλά $|e^{iz}|^2 = |e^{i(x+iy)}|^2 = |e^{ix}|^2 |e^{-y}|^2 = e^{-2y}$ και ομοίως $|e^{-iz}|^2 = e^{2y}$.

14. Βρείτε τα σύνολα που προκύπτουν από τις εκφράσεις $((1+i)^3)^i$, $(1+i)^{3i}$, $(3i)^{(1+i)}$.

Λύση.

$$((1+i)^3)^i = (-2+2i)^i = e^{i \log((-2+2i))}.$$

Επειδή

$$\log((-2+2i) = \text{Log}|(-2+2i)| + i \text{Arg}(-2+2i) + 2k\pi i = \frac{3}{2}\text{Log}2 + \frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i$$

έχουμε

$$((1+i)^3)^i = e^{\frac{3}{2}i\text{Log}2 - \frac{3}{4}\pi - 2k\pi}, k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

Επειδή

$$\log(1+i) = \text{Log}|1+i| + i \text{Arg}(1+i) + 2k\pi i = \frac{1}{2}\text{Log}2 + \frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i$$

έχουμε

$$(1+i)^{3i} = e^{3i\log(1+i)} = \frac{1}{2}\text{Log}2 + \frac{1}{4}\pi i + 6k\pi i, k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

(Παρατηρούμε ότι από τις εκφράσεις δεν προέκυψαν ίδια σύνολα αλλά το δεύτερο είναι υποσύνολο του πρώτου.)

Για την τρίτη έκφραση ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε

$$\log(3i) = \text{Log}3 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi i \text{ οπότε}$$

$$(3i)^{(1+i)} = e^{(1+i)\log(3i)} = e^{\text{Log}3 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi + i(\text{Log}3 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

15. Αν $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = -3 + 4i$, $z_4 = -4 + 3i$ απαντήστε ποιές από τις παρακάτω ισότητες αληθεύουν.

$$\text{Log}z_1 z_2 = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2, \text{Log}z_4 z_2 = \text{Log}z_4 + \text{Log}z_2, \text{Log}z_2 \bar{z}_4 = \text{Log}z_2 + \text{Log}\bar{z}_4,$$

$$\text{Log}z_1^4 = 4\text{Log}z_1, \text{Log}z_3^3 = 3\text{Log}z_3.$$

Λύση.

Από το τεταρτημόριο που ανήκει το κάθε σημείο παίρνουμε τις παρακάτω ανισότητες.

$$0 < \text{Arg}z_1 < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < \text{Arg}z_2 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \text{Arg}z_3 < \frac{3\pi}{4} \text{ και } \frac{3\pi}{4} < \text{Arg}z_4 < \pi.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν $-\pi < \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 \leq \pi$. Αξιοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 < \frac{3\pi}{4}$ οπότε η απάντηση είναι θετική.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $\text{Arg}z_4 + \text{Arg}z_2 > \pi$ οπότε η απάντηση είναι αρνητική.

Στην τρίτη περίπτωση επειδή $\operatorname{Arg} \bar{z}_4 = -\operatorname{Arg} z_4$, έχουμε $-\pi < \operatorname{Arg} \bar{z}_4 < -\frac{3\pi}{4}$ και

$$-\frac{3\pi}{4} < \operatorname{Arg} \bar{z}_4 + \operatorname{Arg} z_2 < -\frac{\pi}{4} \text{ οπότε η απάντηση είναι θετική.}$$

Για την τέταρτη περίπτωση επειδή $0 < 4\operatorname{Arg} z_1 < \pi$ η απάντηση είναι θετική.

Για την τελευταία περίπτωση επειδή $3\operatorname{Arg} z_3 > \frac{3\pi}{2}$ η απάντηση είναι αρνητική.

16. Αν f είναι αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f|^2 = |f'|^2$$

Λύση. $\frac{\partial}{\partial x}|f|^2 = \frac{\partial}{\partial x}f\bar{f} = f_x\bar{f} + f\bar{f}_x,$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f|^2 = f_{xx}\bar{f} + 2|f_x|^2 + \bar{f}_{xx}f,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f|^2 = f_{yy}\bar{f} + 2|f_y|^2 + \bar{f}_{yy}f.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $f_{xx} + f_{yy} = 0$, $\bar{f}_{xx} + \bar{f}_{yy} = 0$ και $|f_x| = |f_y| = |f'|$ προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε το ζητούμενο.

Διαλέξαμε έναν συνοπτικό γρήγορο τρόπο για την απόδειξη. Ο αναγνώστης καλείται να οργανώσει μια λεπτομερή λύση θέτοντας $f = u + iv$.

Ειδική περίπτωση του παραπάνω συμπεράσματος αποτελεί η παρακάτω άσκηση.

17. Αν f είναι αναλυτική συνάρτηση σε τόπο με $|f|^2$ αρμονική σε αυτόν τότε η συνάρτηση είναι σταθερή. (Εξηγείστε γιατί η διαφοροποίηση του πεδίου ορισμού σε τόπο είναι ουσιαστική.)

18. Αν $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε σύνολο O συμμετρικό ως προς τον άξονα των x τότε η συνάρτηση $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ είναι αναλυτική στο O και ισχύει $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ για κάθε $z \in O$

Λύση.

Επειδή $\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0$ όταν $z \rightarrow z_0$ έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} = f'(\bar{z}_0)$$

και παίρνοντας τα συζυγή

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}}{\overline{\bar{z} - \bar{z}_0}} = \overline{f'(\bar{z}_0)},$$

δηλαδή για κάθε $z_0 \in O$ υπάρχει η παράγωγος $g'(z_0)$ και ισχύει $g'(z_0) = \overline{f'(\bar{z}_0)}$.

Σκόπιμα στο σώμα της απόδειξης δεν αναφέρθηκε στην συμμετρικότητα του συνόλου αφήγοντάς η στον αναγνώστη να εντοπίσει που χρησιμοποιήθηκε. Ο αναγνώστης καλείται επίσης να δώσει μια δεύτερη λύση θεωρώντας $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ και $g(x, y) = u(x, -y) - v(x, -y)$.

19. Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα και αναλυτικότητα οι συναρτήσεις,

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z}, \quad z \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad g(z) = \sqrt{|xy|}, \quad h(z) = |z|^5 + 3e^z + 1.$$

Λύση. Για $z \neq 0$ έχουμε $f_{\bar{z}} = \frac{2\bar{z}}{z} \neq 0$, δηλαδή δεν ισχύουν οι συνθήκες C-R οπότε δεν υπάρχει η παράγωγος. Στο σημείο $z = (0, 0)$ έχουμε $f(x, 0) = x$, $f(0, y) = iy$ οπότε $f_x(0, 0) = -if_y(0, 0) = 1$, δηλαδή ισχύουν οι συνθήκες C-R. Παρόλα αυτά η παράγωγος δεν υπάρχει στο μηδέν. Πράγματι η συνάρτηση $\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{\bar{z}^2}{z^2}$ όταν το $z \rightarrow 0$ κινούμενο στον πραγματικό άξονα έχει όριο 1 και για $z = t(1+i)$, $t \in \mathbb{R}$ έχουμε όριο -1 .

(Ως γνωστό δεν αρκούν οι συνθήκες C-R για την παραγωγισιμότητα αλλά χρειάζεται επιπλέον και η διαφορισιμότητα με την πραγματική έννοια που στην περίπτωση μας δεν ισχύει.)

Σχετικά με την συνάρτηση $g = u + iv$ με $u(x, y) = \sqrt[4]{x^2y^2}$ και $v = 0$ με απλούς υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι δεν ισχύουν οι συνθήκες C-R στα σημεία που ισχύει $xy \neq 0$.

Επειδή $g(0, y) = 0$, $g(x, 0) = 0$ έχουμε $g_x(0, 0) = -ig_y(0, 0) = 0$ δηλαδή ισχύουν οι συνθήκες C-R.

Η κλίση $\frac{g(z)-g(0)}{z-0}$ αν κινηθούμε στην διχοτόμο $y = x$ δηλαδή $z = x + ix$ γίνεται $\frac{|x|}{(1+i)x}$ που για $x > 0$, $x \rightarrow 0$ δίνει όριο $\frac{1}{1+i}$ και για $x < 0$, $x \rightarrow 0$ δίνει όριο $-\frac{1}{1+i}$, επομένως δεν υπάρχει η παράγωγος στο μηδέν. Αν $x_0 \neq 0$, $f(x_0, y) = \sqrt{|x_0|}\sqrt{|y|}$ από την πραγματική ανάλυση είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει η παράγωγος ως προς y στο μηδέν δηλαδή δεν υπάρχει το $f_y(x_0, 0)$ για τυχόν $x_0 \neq 0$.

Με την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει το $f_x(y_0, 0)$ για τυχόν $y_0 \neq 0$. Τελικά δεν υπάρχει η παράγωγος σε κανένα σημείο.

Σχετικά με την συνάρτηση h . Επειδή η συνάστηση $3e^z + 1$ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο αρκεί να μελετήσουμε την συνάρτηση $q(z) = |z|^5 = (\sqrt{x^2 + y^2})^5$.

Για $z \neq 0$ έχουμε $f_x = 2x(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, $f_y = 2y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ οπότε $f_x(z) \neq -if_y(z)$.

Για $z = 0$ έχουμε $\frac{q(z)-q(0)}{z-0} = \bar{z}|z|^3 \rightarrow 0$ όταν $z \rightarrow 0$, δηλαδή $q'(0) = 0$. Τελικά η συνάρτηση $h(z) = |z|^5 + 3e^z + 1$ έχει παράγωγο μόνο στο σημείο μηδέν την τιμή $h'(0) = 3$.

Σε καμία από τις περιπτώσεις δεν έχουμε σημείο που η αντίστοιχη συνάρτηση να είναι αναλυτική.

20. Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα και την αναλυτικότητα οι συναρτήσεις,

$$f(z) = 9x^3 - x - i(4y^3 - y), g(z) = |z - 1|^2 + |z - 2|^2 + |z - 3|^2, h(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + i(e^x(y \cos y + x \sin y)) \quad z \in \mathbb{C}.$$

Λύση. Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε όλες οι συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες με την πραγματική έννοια σε όλο το πεδίο ορισμού τους διότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς, επομένως έχουν παράγωγο ακριβώς στα σημεία εκείνα που ισχύουν οι συνθήκες C-R.

Οι συνθήκες $f_x = 27x^2 - 1 = -if_y = -12y^2 + 1$, δίνουν ότι το σύνολο παραγωγισιμότητας της f απαρτίζεται από τα σημεία της έλλειψης $27x^2 + 12y^2 = 2$ και σε αυτά ισχύει $f'(z) = f_x = 27x^2 - 1$

Σε κανένα σημείο η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική διότι δεν υπάρχει κανένας ανοικτός δίσκος που η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του.

Σχετικά με την συνάρτηση g η μορφή $g(z) = (z - 1)(\bar{z} - 1) + (z - 2)(\bar{z} - 2) + (z - 3)(\bar{z} - 3)$ μας 'υπαγορεύει' να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες

C-R στην ισοδύναμη εκδοχή $g_{\bar{z}} = 0$ ή $(z - 1) + (z - 2) + (z - 3) = 0$ που σημαίνει ότι έχουμε μοναδικό σημείο παραγωγισιμότητας $z_0 = 2$. Η παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f_z(z_0) = (\bar{z}_0 - 1) + (\bar{z}_0 - 2) + (\bar{z}_0 - 3) = 0$. Προφανώς η συνάρτηση δεν είναι πουθενά αναλυτική.

Για την συνάρτηση h μετά τις μερικές παραγωγίσεις ο αναγνώστης μπορεί να διαπιστώσει ότι ισχύουν οι συνθήκες C-R σε όλο το μιγαδικό επίπεδο και επειδή είμαστε σε ανοικτό σύνολο η συνάρτηση θα είναι αναλυτική. Ένα εξοικειωμένο βλέμμα με την άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών θα μπορούσε να αποφύγει τους υπολογισμούς παρατηρώντας ότι $f(z) = e^x(x + iy)(\cos y + i \sin y) = ze^z$ που προφανώς είναι αναλυτική.

21. Να βρείτε συνάρτηση ορισμένη σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο πραγματικά διαφορίσιμη που το σύνολο των σημείων που παραγωγίζεται να απαρτίζεται από τούς δύο άξονες και τις διχοτόμους των γωνιών του.

Λύση. Τα σημεία της παραγωγισιμότητας που απαιτούμε περιγράφονται με ενιαία εξίσωση $(x - y)(x + y)xy = 0$.

Θέτουμε $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ και μετά τις πράξεις η παραπάνω εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μιγαδική μορφή $z^4 - \bar{z}^4 = 0$.

Αναζητούμε μία παράγουσα του πρώτου σκέλους ως προς $\bar{z}$. Μία τέτοια είναι η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}z^4 - \frac{1}{5}\bar{z}^5$.

Η παραπάνω συνάρτηση έχει μερικές παραγωγούς συνεχείς στο επίπεδο οπότε είναι πραγματικά διαφορίσιμη και οι συνθήκες C-R $f_{\bar{z}} = z^4 - \bar{z}^4 = 0$ ικανοποιούνται από την κατασκευή της αποκλειστικά στο σύνολο που απαιτείται. Επιπλέον στο σύνολο αυτό η παράγωγος δίδεται από τον τύπο $f'(z) = f_z(z) = z^4$. Επειδή το σύνολο των σημείων παραγωγισιμότητας δεν έχει εσωτερικά σημεία η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

22. Να εξεταστεί ποιές συναρτήσεις έχουν συζυγή αρμονική στο πεδίο ορισμού τους και στην θετική περίπτωση να ευρεθούν στις περιπτώσεις.

$$u_1(x, y) = y^3 - 3yx^2, \quad u_2(x, y) = y^3 - 3yx^2, \quad u_3(x, y) = \text{Log}[(x-1)^2 + (y-2)^2],$$

$$u_4(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad u_5(r, \theta) = 5 + 3r \cos \theta + 7r \sin \theta + 8r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

(Πεδία ορισμού θεωρείστε τα αντίστοιχα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου που έχουν νόημα οι εκφράσεις τους)

Λύση. Σχετικά με την u_1 Με στοιχειώδεις παραγωγίσεις διαπιστώνουμε ότι $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$, δηλαδή η συνάρτηση είναι αρμονική στο πεδίο ορισμού της. Επί πλέον το πεδίο ορισμού είναι ολόκληρο το επίπεδο που είναι απλά συνεκτικό οπότε σίγουρα υπάρχει συζυγής αρμονική.

Για την εύρεση έχουμε $u_x = -6y = v_y$ οπότε $v(x, y) = -3y^2 + c(x)$. Από την σχέση $v_x = -u_y = -3y^2 + 3x^2$ έχουμε $c'(x) = 3x^2$ ή $c(x) = x^3 + c$ και $v(x, y) = -3y^2 + x^3 + c$.

Στην περίπτωση μας και γενικά στις ρητές συναρτήσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν λιγότερο επίπονο τρόπο βρίσκοντας πρώτα την αναλυτική συνάρτηση και στη συνέχεια να παίρνουμε την συζυγή αρμονική από το φανταστικό της μέρος. Πιο συγκεκριμένα αν θέσουμε $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ μετά τις πράξεις η παραπάνω συνάρτηση παίρνει την μιγαδική μορφή $iz^3 - i\bar{z}^3 = \text{Re}(2iz^3)$. Είναι τώρα προφανές ότι $v = \text{Im}(2iz^3) + c$.

Σχετικά με την συνάρτηση u_2 μετά τις στοιχειώδεις παραγωγίσεις εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν είναι αρμονική οπότε δεν έχει συζυγή αρμονική.

Σχετικά με την u_3 εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι αρμονική. Εδώ πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί γιατί το πεδίο ορισμού $\mathbb{C} - \{1 + 2i\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό (έχει τρύπα στο $(1, 2)$) και δεν μπορούμε ακίνδυνα να συνεχίσουμε την προηγούμενη διαδικασία. Είμαστε αναγκασμένοι να περιοριστούμε σε κατάλληλο υποσύνολο απλα συνεκτικό τόπο και στη συνέχεια να δούμε αν επεκτείνεται το αποτέλεσμα. Στην περίπτωση μας η συνάρτηση γράφεται $2\text{Log}|z - 1 - 2i| = \text{Re}(2\text{Log}(z - 1 - 2i))$ Αν περιοριστούμε στο σύνολο $OC = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(z - 1 - 2i) = 0, \text{Re}(z - 1 - 2i) \leq 0\}$ Δηλαδή να αφαιρέσουμε από το μιγαδικό επίπεδο την ημιευθεία ($y = 2, x \leq 1$) γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $2\text{Log}(z - 1 - 2i)$ είναι αναλυτική στον παραπάνω

τόπο οπότε σε αυτόν οι συζυγείς αρμονικές της αρχικής συνάρτησης είναι $Im(2Log(z-1-2i)) = 2Arg(z-1-2i) + c$. Είναι γνωστό όμως ότι η προηγούμενη συνάρτηση δεν επεκτείνεται συνεχώς σε κανένα σημείο της απομένουσας ημιευθείας που σημαίνει ότι η αρχική δεν έχει αρμονική συζυγή. Προφανώς ο περιορισμός που χρησιμοποιήσαμε είναι ο μεγαλύτερος δυνατός που δίνει αρμονική συζυγή.

Σχετικά με την u_4 θα διαπιστώσουμε ότι, παρά το γεγονός ότι ο τόπος ορισμού έχει τρύπα στο μηδέν η συνάρτηση έχει συζυγή αρμονική.

Πράγματι αν θέσουμε $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ έχουμε

$$x^2 - y^2 = Rez^2, \frac{x}{x^2 + y^2} = Re \frac{z}{z\bar{z}} = Re \frac{1}{\bar{z}} = Re \frac{1}{z},$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = Re\left(\frac{-iz}{z\bar{z}}\right) = Re \frac{i}{z}$$

οπότε $u_4(x, y) = Re(z^2 + \frac{1+i}{z})$.

Είναι τώρα προφανές ότι η u_4 έχει συζυγή αρμονική την $v_4(x, y) = Im(z^2 + \frac{1+i}{z})$.

Σχετικά με την u_5 χρησιμοποιώντας τις ισότητες $\cos \theta = Re(e^{i\theta})$

$\sin \theta = Re(-ie^{i\theta})$ παίρνουμε

$$u_5(r, \theta) = 5 + 3r \cos \theta + 7r \sin \theta + 8r^2 \sin \theta \cos \theta = \\ Re(5 + 3re^{i\theta} - 7ire^{i\theta} + 4r^2 e^{2i\theta}) = Re(5 + (3 - 7i)z + 4z^2).$$

Είναι τώρα προφανές ότι η συνάρτηση έχει αρμονικά συζυγείς τις $Im(5 + (3 - 7i)z + 4z^2) + c$. Αφήνεται στον αναγνώστη να τις εκφράσει σε μορφή πολικών συντεταγμένων.

23. Αν R η ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς $\sum a_n z^n$ και k φυσικός αριθμός βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum n^k a_n z^n$, $\sum a_n z^{kn}$ και $\sum a_n^k z^n$.

Λύση. Σχετικά με την πρώτη δυναμοσειρά έχουμε

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n^k |a_n|} = (\lim \sqrt[n]{n})^k \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Σχετικά με την δεύτερη, αν θέσουμε $z^k = Z$ η σύγκλιση της σειράς $\sum a_n Z^n$ για $|Z| < R$ δίνει $|z| < \sqrt[k]{R}$.

Δεύτερος τρόπος είναι να πάρουμε την σχέση

$$\frac{1}{R_2} = \overline{\lim} \sqrt[kn]{|a_n|} = \sqrt[k]{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt[k]{R}}.$$

Σχετικά με την τρίτη δυναμοσειρά έχουμε

$$\frac{1}{R_3} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n^k|} = (\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|})^k = \frac{1}{R^k}$$

24. Αν p, q πολυώνυμα, k, m ακέραιοι και $h(n)$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών αποδείξτε ότι η σειρά $\sum p^k(n)(\text{Log}(q(n)))^m z^{h(n)}$ έχει ακτίνα σύγκλισης ένα.

Λύση.

Για κάθε συγκεκριμένο z θα εξετάσουμε ως προς την σύγκλιση την αντίστοιχη σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum f_n(z)$ με το κριτήριο του λόγου δηλαδή θα βρούμε τα z για τα οποία ισχύει,

$$\frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} = \left| \frac{p(n+1)}{p(n)} \right|^k \left| \frac{\text{Log}(q(n+1))}{\text{Log}(q(n))} \right|^m |z|^{h(n+1)-h(n)} < 1 \text{ για } n > n_0.$$

Επειδή τα πολυώνυμα $p(x), p(x+1)$ έχουν τον ίδιο συντελεστή στο μεγαλύτερο όρο έχουμε $\lim \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1$. Επίσης ισχύει $\lim \frac{\text{Log}(q(n+1))}{\text{Log}(q(n))} = 1$. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε έναν απλό και ιδιαίτερα αποτελεσματικό τρόπο που εφαρμόζεται για ακολουθίες που προέρχονται από περιορισμούς πραγματικών συναρτήσεων στις οποίες εφαρμόζεται ο κανόνας Hospital. (Εδώ χρειάζεται προσοχή διότι μερικοί, εσφαλμένα προφανώς, εφαρμόζουν τον κανόνα χωρίς να θεωρήσουν συνάρτηση παίρνοντας παράγωγο ακολουθίας)

Θεωρούμε την συνάρτηση $\frac{\text{Log}(q(x+1))}{\text{Log}(q(x))}$ και θα αποδείξουμε ότι για $x \rightarrow \infty$ έχει όριο 1. Πράγματι έχουμε την περίπτωση $\frac{+\infty}{+\infty}$ οπότε

$$\frac{(\text{Log}(q(x+1)))'}{(\text{Log}(q(x)))'} = \frac{q'(x+1)q(x)}{q'(x)q(x+1)} \rightarrow 1 \text{ όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Επίσης

$$|z^{h(n+1)-h(n)}| \leq |z| \text{ όταν } |z| < 1 \text{ και } |z^{h(n+1)-h(n)}| \geq |z| \text{ όταν } |z| > 1.$$

Για $|z| < 1$ έχουμε

$$\frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} \leq \left| \frac{p(n+1)}{p(n)} \right|^k \left| \frac{\text{Log}(q(n+1))}{\text{Log}(q(n))} \right|^m |z| \rightarrow |z| < 1$$

που σημαίνει ότι τελικά για όλους τους δείκτες ισχύει $\frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} < 1$ οπότε έχουμε σύγκλιση στο δίσκο $|z| < 1$.

Για $|z| > 1$ με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε $\frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} > 1$ που σημαίνει ότι δεν συγκλίνει η σειρά στο εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ένα.

25. Να υπολογιστούν οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

1. $\sum (a^n + b^n)z^n, |a| < |b|,$
2. $\sum (n + b^n)z^n,$
3. $\sum a^{n^2} z^{kn}, k$ φυσικός,
4. $\sum a^{kn} z^{n^2}, k$ φυσικός,
5. $\sum (1+i)^{4n} z^{3^{2n}},$
6. $\sum (1+i)^{3^{2n}} z^{4n},$
7. $\sum 3^{2n} z^{4n!},$
8. $\sum 3^{4n!} z^{2n},$
9. $\sum \frac{n!}{n^n} z^{kn}, k$ φυσικός.

Λύση.

1. Από την ισότητα

$$\left| \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \right| = \left| \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} + 1}{\frac{1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{1}{b}} \right|$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι $\left(\frac{a}{b}\right)^n \rightarrow 0$ παίρνουμε

$$\left| \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \right| \rightarrow |b| = \frac{1}{R_1}.$$

Ενας δεύτερος τρόπος είναι να αποδείξουμε ότι οι σειρές $\sum a^n z^n$ και $\sum b^n z^n$ έχουν ακτίνες σύγκλισης $\frac{1}{|a|}$ και $\frac{1}{|b|}$ αντίστοιχα που δεν είναι ίσες μεταξύ τους οπότε η μικρότερη είναι ακτίνα σύγκλισης του αθροίσματος.

2. Για $|a| \leq 1$ έχουμε $\frac{a^n}{n} \rightarrow 0$ οπότε

$$\left| \frac{n+1+a^{n+1}}{n+a^n} \right| = \left| \frac{1+\frac{1}{n}+a\frac{a^n}{n}}{1+\frac{a^n}{n}} \right| \rightarrow 1 = \frac{1}{R_2}.$$

Για $|a| > 1$ έχουμε $\frac{n}{a^n} \rightarrow 0$ (βρείτε γιατί) οπότε

$$\left| \frac{n+1+a^{n+1}}{n+a^n} \right| = \left| \frac{\frac{n+1}{a^{n+1}}+1}{\frac{1}{a}+\frac{n}{a^n}\frac{1}{a}} \right| \rightarrow |a| = \frac{1}{R_2}.$$

3. Διερευνούμε την υπαρξη τού ορίου της ακολουθίας $\sqrt[n]{|a|^{kn^2}} = (|a|^{\frac{1}{k}})^n$. Ως γνωστό το όριο της παραπάνω ακολουθίας στην περίπτωση $|a| < 1$ είναι μηδέν οπότε $R_3 = +\infty$. Στην περίπτωση $|a| = 1$ έχουμε $R_3 = 1$ και στην περίπτωση $|a| > 1$ το όριο είναι $+\infty$ οπότε $R_3 = 0$.

$$4. \lim \sqrt[n^2]{|a|^{kn}} \lim |a|^{\frac{kn}{n^2}} = \lim |a|^{\frac{k}{n}} = 1 = \frac{1}{R_4}.$$

5. Διερευνούμε ως προς το όριο την ακολουθία $|1 + i|^{\frac{4n}{3^{2n}}}$. Το όριο της ακολουθίας $\frac{4n}{3^{2n}}$ είναι μηδέν (όποιος θέλει να αποφύγει μια απευθείας αναμέτρηση μαζί του μπορεί να καταφύγει στην βοήθεια του κανόνα Hospital θεωρώντας την συνάρτηση $\frac{4x}{3^{2x}}$). Τελικά έχουμε $\frac{1}{R_5} = 1 = R_5$.

6. Από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $\frac{3^{2n}}{4n} \rightarrow +\infty$, οπότε

$$|1 + i|^{\frac{3^{2n}}{4n}} = (\sqrt{2})^{\frac{3^{2n}}{4n}} \rightarrow +\infty$$

που σημαίνει ότι $R_6 = 0$.

7. Επειδή $3^{\frac{2n}{4n!}} = 3^{\frac{2}{(n-1)!}} \rightarrow 1$ έχουμε $R_7 = 1$.

8. Επειδή $\frac{4n!}{2n} \rightarrow +\infty$, $3^{\frac{4n!}{2n}} \rightarrow +\infty$ έχουμε $R_8 = 0$.

9. Αν $f_n(z) = \frac{n!}{n^n} z^{kn}$ τότε

$$\frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} = \frac{n+2}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z| \rightarrow e|z|^k.$$

Επειδή $e|z|^k < 1$ όταν $|z| < \sqrt[k]{\frac{1}{e}}$ έχουμε $R_9 = \sqrt[k]{\frac{1}{e}}$.

26. Υπολογίστε τις ακτίνες σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης.

1. $\sum (a^n + b^n) n z^{n+8}$, $|a| < |b|$.
2. $\sum (n + b^n) n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) z^n$.
3. $\sum (1+i)^{3^{2n}} n(4n-1)(4n-2) z^{4n}$.

Λύση

1. Για κάθε z η αντίστοιχη σειρά γίνεται $z^9 \sum (a^n + b^n) n z^{n-1}$, επομένως η ζητούμενη ακτίνα ταυτίζεται με την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum (a^n + b^n) n z^{n-1} = \sum (a^n + b^n) (z^n)'.$$

Από το γνωστό θεώρημα παραγωγίσης δυναμοσειρών η ακτίνα της τελευταίας συμπίπτει με την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum (a^n + b^n) z^n$ που μελετήσαμε στο παράδειγμα 1 της προηγούμενης άσκησης.

2. Η ζητούμενη ακτίνα συμπίπτει με την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum (n + b^n)n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)z^{n-k} = \sum (n + b^n)(z^n)^{(k)}$$

που με την σειρά του ταυτίζεται με την ακτίνα του δεύτερου παραδείγματος της προηγούμενης άσκησης,

3. Από την έκφραση της αντίστοιχης σειράς στη μορφή $\frac{1}{4}z^3 \sum (1+i)^{3^{2n}} 4n(4n-1)(4n-2)z^{4n-3}$ προκύπτει ότι η ζητούμενη ακτίνα ταυτίζεται με την ακτίνα της δυναμοσειράς

$$\sum (1+i)^{3^{2n}} (z^{4n})^{(3)}$$

που με τη σειρά της ταυτίζεται με την ακτίνα του παραδείγματος 6 της προηγούμενης άσκησης .

27. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (an^3 + bn^2 + cn + d) \left(\frac{z_1^{n+k}}{z_2^{n+m}} \right), \text{ όταν } |z_1| < |z_2|.$$

Λύση.

Από τις ισότητες

$$n^2 = n(n-1) + n, \quad n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$$

η σειρά παίρνει την μορφή του αθροίσματος

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} an(n-1)(n-2) \frac{z_1^{n+k}}{z_2^{n+m}} + \sum_{n=0}^{+\infty} (3a+b)n(n-1) \frac{z_1^{n+k}}{z_2^{n+m}} + \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (a+b+c)n \frac{z_1^{n+k}}{z_2^{n+m}} + \sum_{n=0}^{+\infty} d \frac{z_1^{n+k}}{z_2^{n+m}}. \end{aligned}$$

Επειδή $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ όταν $|z| < 1$ ο πρώτος προσθετέος γράφεται

$$a \frac{z_1^{k+3}}{z_2^{m+3}} f^{(3)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right), \text{ Ο δεύτερος } (3a+b) \frac{z_1^{k+2}}{z_2^{m+2}} f^{(2)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right),$$

$$\text{ο τρίτος } (a+b+c) \frac{z_1^{k+1}}{z_2^{m+1}} f'\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \text{ και ο τέταρτος } d \frac{z_1^k}{z_2^m} f\left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

28. Χωρίς να εφαρμόσετε τον τύπο Taylor αλλά την βοήθεια της γεωμετρικής σειράς αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το μηδέν την συνάρτηση $\text{Log}(1-z)$, $|z| < 1$. Στη συνέχεια με την βοήθεια του αναπτύγματος που θα βρείτε δώστε σε μορφή σειράς ρητών μιγαδικών τους αριθμούς $\text{Log}\left(\frac{1+i}{2}\right)$, π . **Λύση.**

Από την σχέση

$$(\text{Log}(1-z))' = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

παίρνουμε

$$\text{Log}(1-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$$

και θέτοντας $z=0$ παίρνουμε $c=0$.

Επειδή $\frac{1+i}{2} = 1 - \frac{1-i}{2}$ και $|\frac{1-i}{2}| < 1$ έχουμε

$$\text{Log}\left(\frac{1+i}{2}\right) = - - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}.$$

Από τις σχέσεις $(1-i)^2 = -2i$, $(1-i)^3 = -2(1+i)$, $(1-i)^4 = -4$, αν θέσουμε $n = 4k + m$, $m = 0, 1, 2, 3$ έχουμε

$$\frac{(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{(-1)^k (1-i)^{m+1}}{(4k+m+1)2^{2k+m+1}},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \text{Log}\left(\frac{1+i}{2}\right) &= - \sum_{m=0}^3 (1-i)^{m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+m+1)2^{2k+m+1}} = \\ &= -(1-i) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)2^{2k+1}} + 2i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+2)2^{2k+2}} + \\ &+ 2(1+i) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+3)2^{2k+3}} + 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+4)2^{2k+4}} \end{aligned}$$

Επειδή $\text{Im}\text{Log}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, από τα φανταστικά μέρη στο προηγούμενο ανάπτυγμα έχουμε

$$\pi = +4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)2^{2k+1}} + 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+2)2^{2k+2}} + 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+3)2^{2k+3}}$$

29. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{5n+1}}{n!3^{3n+2}}$, 2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{5n+1}}{(2n+1)!3^{3n+2}}$, 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{5n+1}}{(2n)!3^{3n+2}}$, 4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{(2n)!3^{3n+2}}$,
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{(2n+1)!3^{3n+2}}$.

Λύση.

Το ουσιαστικό πρόβλημα με ασκήσεις τις παραπάνω μορφής είναι να τις συσχετίσουμε με το κατάλληλο γνωστό ανάπτυγμα δυναμοσειράς. Ανάμεσα στα λίγα πράγματα που χρειάζεται κανείς να έχει απομνημονεύσει αφού πρώτα τα έχει μελετήσει είναι τα αναπτύγματα των ορισμένων κλασικών συναρτήσεων που ονομάσαμε θεμελιώδεις .

Σχετικά με το 1. Το ανάπτυγμα που μας προδιαθέτει να συσχετίσουμε το άθροισμα είναι το

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Πράγματι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{5n+1}}{n!3^{3n+2}} = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{32}{27}\right)^n \frac{1}{n!} = \frac{2}{9} e^{\frac{32}{27}}.$$

Σχετικά με το 2. Το ανάπτυγμα που θα χρειαστούμε είναι

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

.

Πράγματι αν θέσουμε $5n+1 = \frac{5}{2}(2n+1) - \frac{3}{2}$, $3n+1 = \frac{3}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{5n+1}}{(2n+1)!3^{3n+2}} = \frac{2^{\frac{-3}{2}}}{3^{\frac{-1}{2}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{3}{8}} \sinh\left(\sqrt{\frac{32}{27}}\right).$$

Σχετικά με το 3. Το ανάπτυγμα που θα χρειαστούμε είναι

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

.

Πράγματι,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{5n+1}}{(2n)!3^{3n+2}} = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} = \frac{2}{9} \cosh\left(\sqrt{\frac{32}{27}}\right).$$

Σχετικά με το 4.

Το ανάπτυγμα που θα χρειαστούμε είναι

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

και εργαζόμενοι όπως στο 3. (Η διαφοροποίηση υπάρχει στο $(-1)^n$) παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{(2n)! 3^{3n+2}} = \frac{2}{9} \cos \left(\sqrt{\frac{32}{27}} \right).$$

Σχετικά με το 5. Το ανάπτυγμα που θα χρειαστούμε είναι

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

και με τη διαδικασία του 2. βρίσκουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{(2n+1)! 3^{3n+2}} = \sqrt{\frac{3}{8}} \sin \left(\sqrt{\frac{32}{27}} \right).$$

.

30. Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η συνάρτηση $\frac{1}{1+2z+4z^2+8z^3+16z^4+32z^5+64z^6}$ στους μεγαλύτερους δυνατούς δακτυλίου.

Λύση.

Επειδή

$$\frac{1}{1+2z+4z^2+8z^3+16z^4+32z^5+64z^6} = \frac{1-2z}{1-2^6 z^6}$$

οι μεγαλύτεροι δυνατοί δακτύλιοι καθορίζονται από τις σχέσεις $|2^6 z^6| < 1$ ή $|z| < \frac{1}{2}$ και $|2^6 z^6| > 1$ ή $|z| > \frac{1}{2}$.

Στην πρώτη περίπτωση από τον γνωστό τύπο της γεωμετρικής σειράς έχουμε

$$\frac{1-2z}{1-2^6 z^6} = (1-2z) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{6n} z^{6n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{6n} z^{6n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{6n+1} z^{6n+1}.$$

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $|\frac{1}{2^6 z^6}| < 1$ οπότε

$$\frac{2z-1}{2^6 z^6 - 1} = \frac{2z-1}{2^6 z^6} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^6 z^6}} = \frac{2z-1}{2^6 z^6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{6n} z^{6n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{6n+5} z^{6n+5}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{6n+6} z^{6n+6}}.$$

31. Αν $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\frac{1}{a+bz+cz^2}$, $a \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$aa_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = 0 \text{ όταν } n = 2, 3, \dots$$

Λύση. Για πρακτικούς λόγους ορίζουμε $a_k = 0$ όταν $k < 0$. Από την σχέση

$$\frac{1}{a + bz + cz^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

έχουμε

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b a_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c a_n z^{n+2} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b a_{n-1} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c a_{n-2} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a a_n + b a_{n-1} + c a_{n-2}) z^n.$$

Από την ταύτιση του τελευταίου αναπτύγματος με την μονάδα προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

32. Βρείτε τα σύνολα των ακεραίων συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει

$$1. \operatorname{Re} f \geq 0, 2. |f^{(4)}(z)| \leq 32.$$

Λύση. Σχετικά με το 1. Αν $F = e^{-f}$ τότε προφανώς F ακεραία και $|F| = e^{-\operatorname{Re} f} \leq 1$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Liouville στην συνάρτηση F προκύπτει ότι είναι σταθερή επομένως $F' = e^f f' = 0$ ή $f' = 0$ οπότε f σταθερή.

(Ενα γενικότερο συμπέρασμα που τώρα μπορεί να αποδείξει κανείς είναι ότι αν σε ακεραία συνάρτηση ισχύει οποιαδήποτε σχέση της μορφής $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f + c \geq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$, τότε f σταθερή. Επειδή $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f + c = \operatorname{Re}((a - ib)f + c)$ μπορούμε να εργαστούμε όπως προηγουμένως χρησιμοποιώντας αντί της f την συνάρτηση $(a - ib)f$.)

Σχετικά με το 2. Επειδή f ακεραία όπως είναι γνωστό θα έχει κάθε τάξης παράγωγο στο πεδίο ορισμού της δηλαδή σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο οπότε και η $f^{(4)}$ θα είναι ακεραία. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Liouville στην συνάρτηση $f^{(4)} = c$ προκύπτει ότι είναι σταθερή και αυτό ισοδυναμεί με την πρόταση ότι συμπίπτει με πολυώνυμο το πολύ βαθμού 4 με συντελεστή της τετάρτης δύναμης $\frac{c}{24}, |c| \leq 32$. (Γενικότερα σε μια αναλυτική συνάρτηση σε τόπο ισχύει $f^{(k)}$ σταθερή εάν και μόνο εάν ταυτίζεται με πολυώνυμο το πολύ βαθμού k . Πράγματι η σχέση $f^{(k)} = c_1 = (c_1 z)'$ δίνει $f^{(k-1)} = c_1 z + c_2, f^{(k-2)} = \frac{c_1}{2} z^2 + c_2 z + c_3$ και συνεχίζοντας προκύπτει το ζητούμενο. αποδείξτε το ίδιο αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά)

33. Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων που είναι αναλυτικές σε σύνολο $\mathbb{C} - A$, και σε όλα τα σημεία του A παρουσιάζει μεμονωμένη ανωμαλία. Βρείτε την μορφή των παραπάνω συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει

$|f(z)| \leq \frac{|z^2|}{1-z^3}$ σε όλα τα z που έχει νόημα η ανισότητα και εξετάστε ποιές έχουν αθέρηβα επέκταση.

Στη συνέχεια επιλύστε το ίδιο πρόβλημα στις περιπτώσεις

1. $|f(z)| \geq \frac{|z^2|}{1-z^3}$, 2. $|f^{(3)}(z)| \leq |z|^3$,
3. $|f^{(2)}(z)| \geq 2|z|^2$ 4. $|f'(z)| \leq 5|z^3 + z^2 + 1|$, 5. $|f'(z)| \geq 5|z^3 + z^2 + 1|$
6. $|f(z)| \leq |e^{\frac{1}{z}} - 1|$ 7. $|f(z)| \geq |e^{\frac{1}{z}} - 1|$.

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ενοποιούνται από την παρακάτω άσκηση

34. Αν δύο συναρτήσεις είναι αναλυτικές σε σύνολο $\mathbb{C} - A$, σε όλα τα σημεία του A παρουσιάζουν μεμονωμένη ανωμαλία και επιπλέον ισχύει $|f| \leq |g|$ τότε υπάρχει σταθερά c με $f = cg$, $|c| \leq 1$.

Λύσεις.

Στην γενική περίπτωση επειδή η συνάρτηση g δεν ταυτίζεται με την μηδενική τότε κάθε σημείο του επιπέδου που δεν η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ δεν είναι αναλυτική θα είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της. Επειδή όμως $|\frac{f}{g}| \leq 1$, δηλαδή είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε μεμονωμένο ανώμαλο σημείο με βάση το θεώρημα επέκτασης του Riemann θα επεκτείνεται αναλυτικά σε αυτό. Τελικά η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ θα επεκτείνεται σε ακεραία και επειδή είναι φραγμένη από το θεώρημα Liouville προκύπτει ότι είναι σταθερή, οπότε $f = cg$ με $|c| \leq 1$.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στην αρχική προκύπτει ότι το σύνολο των συναρτήσεων που ζητάμε περιγράφεται από την σχέση

$$f(z) = c \left(\frac{z^2}{1-z^3} \right) \text{ με } |c| \leq 1.$$

Από αυτές μόνο η μηδενική είναι ακεραία διότι οι υπόλοιπες δεν επεκτείνονται αναλυτικά στο ένα (Το όριο στο ένα είναι άπειρο και έχουμε πόλο).

Στην περίπτωση 1. αντιστρέφονται οι ρόλοι και έχουμε την σχέση

$$\frac{z^2}{1-z^3} = cf(z) \text{ με } |c| \leq 1. \text{ Προφανώς } c \neq 0 \text{ οπότε}$$

$$f(z) = \frac{1}{c} \left(\frac{z^2}{1-z^3} \right) \text{ με } 0 < |c| \leq 1. \text{ Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει καμία αθέρηβα.}$$

Στην περίπτωση 2. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε $f^{(2)}(z) = cz^2$ με $|c| \leq 1$ και διαδοχικά

$$f'(z) = \frac{c}{3} z^3 + c_1, f(z) = \frac{c}{12} z^4 + c_1 z + c_2 \text{ με } |c| \leq 1.$$

Στην περίπτωση 3. εργαζόμενοι όπως στην δύο έχουμε

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{c}z^2 \text{ και } f(z) = \frac{1}{12c}z^4 + c_1z + c_2 \text{ με } 0 < |c| \leq 1.$$

Στην περίπτωση 4. έχουμε

$$f'(z) = 5c(z^3 + z^2 + 1) \text{ ή } f(z) = 5c\left(\frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} + z\right) + c_1 \text{ με } |c| \leq 1.$$

Στην περίπτωση 5. έχουμε

$$f'(z) = \frac{5}{c}(z^3 + z^2 + 1) \text{ ή } f(z) = \frac{5}{c}\left(\frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{32} + z\right) + c_1 \text{ με } 0 < |c| \leq 1.$$

Και στις τέσσερες προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε μόνο ακέραιες συναρτήσεις.

Στην περίπτωση 6. έχουμε

$$f(z) = c(e^{\frac{1}{z}} - 1) \text{ με } |c| \leq 1 \text{ με ακεραία μόνο την μηδενική.}$$

Στην περίπτωση 7. έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{c}(e^{\frac{1}{z}} - 1) \text{ με } 0 < |c| \leq 1 \text{ που καμία δεν είναι ακεραία.}$$

35. Αν f ακεραία συνάρτηση μελετήστε την μορφή της στις παρακάτω περιπτώσεις

$$1. |f(z)| \leq a|z|^{\sqrt{2}} \text{ όταν } |z| \geq R. \quad 2. |f(z)| \leq a|z|^{\frac{\sqrt{17}}{2}} \text{ όταν } |z| \geq a. \quad 3. |f'(z)| \leq 1 + a|z|^{\frac{1}{2}} + |z|\sqrt{226} \text{ όταν } |z| \geq a. \quad 4. |f'(z)| \leq \text{Log}3(1 + 3|z|) + |z|^{\frac{21}{2}}.$$

Οι παραπάνω περιπτώσεις ενοποιούνται στο παρακάτω .

36. Αν $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, $a_n \neq 0$, k ακέραιος με $0 \leq k \leq \lambda_n < k + 1$

και f ακεραία συνάρτηση με $|f(z)| \leq a_0 + a_1|z|^{\lambda_1} + \dots + a_n|z|^{\lambda_n}$ όταν $|z| > a$

τότε η f ταυτίζεται με πολυώνυμο το πολύ βαθμού k .

Λύσεις.

Από την ανισότητα Cauchy για $|z| \leq r$ έχουμε

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{|a_0| + |a_1|r^{\lambda_1} + \dots + |a_n|r^{\lambda_n}}{r^n} = \frac{|a_0|}{r^n} + \frac{|a_1|}{r^{n-\lambda_1}} + \dots + \frac{|a_n|}{r^{n-\lambda_k}}.$$

. Όταν $n > k$ για $r \rightarrow +\infty$ το δεύτερο σκέλος έχει όριο το μηδέν οπότε $f^{(n)}(0) = 0$ όταν $n > k$ και η συνάρτηση γράφεται

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στην περίπτωση 1 επειδή $1 < \sqrt{2} < 2$ προκύπτει ότι η f είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού ένα δηλαδή έχει την μορφή $f(z) = cz + d$.

Στην δεύτερη περίπτωση επειδή $2 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 3$ η συνάρτηση ταυτίζεται με πολυώνυμο το πολύ βαθμού δύο.

Στην τρίτη περίπτωση επειδή η συνάρτηση ταυτίζεται με πολυώνυμο το πολύ βαθμού δεκαπέντε και στην τέταρτη περίπτωση. επειδή $\text{Log}(3(1 + 3|z|^{\frac{1}{2}})) + |z|^{\frac{3}{2}} \leq 9|z|^{\frac{1}{2}} + 3 + |z|^{\frac{21}{2}}$ η συνάρτηση ταυτίζεται με πολυώνυμο το πολύ βαθμού 10.

37. Θεωρούμε μιγαδική συνάρτηση f αναλυτική σε σύνολο $\mathbb{C} - A$, με την ιδιότητα και σε όλα τα σημεία του A να παρουσιάζει μεμονωμένη ανωμαλία. Αν επιπλέον ισχύει $|f(z)| \leq a|z|^\lambda$ στο πεδίο ορισμού της ($a, \lambda \in \mathbb{R}$), να αποδείξετε ότι $f = 0$ όταν ο λ δεν είναι ακέραιος και έχει την μορφή $f(z) = caz^\lambda$ όταν ο λ είναι ακέραιος .

Λύση.

Θεωρούμε τον ακέραιο k με $0 \leq k + \lambda < 1$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(z) = z^k f(z)$ τότε ισχύει $|g(z)| \leq a|z|^{k+\lambda}$. από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η g είναι τοπικά φραγμένη σε όλα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της επομένως με βάση το θεώρημα επέκτασης του Riemann θα επεκτείνεται αναλυτικά σε αυτά οπότε μπορεί να θεωρηθεί ακέραια συνάρτηση. Επειδή $0 \leq k + \lambda < 1$ με βάση την προηγούμενη άσκηση θα είναι σταθερή. Στην περίπτωση που $0 \leq k + \lambda < 1$ δηλαδή ο λ δεν είναι ακέραιος το όριο στο μηδέν και επομένως η σταθερά μηδενίζεται.

(Μπορείτε να διατυπώσετε ανάλογη πρόταση αντιστρέφοντας την αρχική ανισότητα και να την αποδείξετε θεωρώντας την συνάρτηση $\frac{1}{f}$).

38. Θεωρούμε μιγαδική συνάρτηση f αναλυτική σε σύνολο $\mathbb{C} - A$, με την ιδιότητα και σε όλα τα σημεία του A να παρουσιάζει μεμονωμένη ανωμαλία. Να αποδείξετε ότι είτε είναι σταθερή είτε το σύνολο των τιμών της είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Λύση.

Αν το σύνολο τιμών δεν είναι πυκνό στο μιγαδικό επίπεδο σημαίνει ότι υπάρχει δίσκος $D(a, M)$ που δεν περιέχει καμία τιμή της συνάρτησης δηλαδή για κάθε τιμή $f(z)$ ισχύει $|f(z) - a| > M$ ή ισοδύναμα $\frac{1}{|f(z)-a|} < \frac{1}{M}$. Από την τελευταία σχέση, την υπόθεση για την συνάρτηση f και το θεώρημα επέκτασης του Riemann προκύπτει ότι η $\frac{1}{f(z)-a}$ επεκτείνεται σε ακεραία και φραγμένη συνάρτηση και επομένως με βάση το θεώρημα Liouville σταθερή.

39. Βρείτε αν υπάρχουν τις αναλυτικές συναρτήσεις σε τόπο OC στις παρακάτω περιπτώσεις

1. $f(\frac{1}{n}) = \frac{2n+1}{2n}, 0 \in OC$.

2. $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{2n+1}{2n}, 0 \in OC$.

3. $f(\frac{1+1}{\sqrt{3n}}) = \frac{8n^3+1}{8n^3+2}, 1 \in OC$.

4. $f(1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}) = (-1)^n \frac{8n^3+1}{8n^3+2}, 1 \in OC$.

5. $f(\frac{1}{2n}) = n \sin \frac{1}{n} - n \cos \frac{1}{n} + ne^{\frac{1}{n}}, 0 \in OC$.

6. $f(\frac{n+1}{n+2}) = \text{Log} \frac{3n+1}{3n+2} \frac{27(z_n-1)^6+1}{54(z_n-1)^6+1}, 1 \in OC$.

7. $f(1 + \frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}, 1 \in OC$

$(n = 1, 2, 3 \dots)$

Λύση. Σχετικά με το πρώτο ερώτημα θεωρούμε την ακολουθία $z_n = \frac{1}{n}$. Η ακολουθία έχει όριο το μηδέν που ανήκει στον τόπο OC κάτι που αποτελεί προϋπόθεση για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ταυτισμού. Η υπόθεση $f(z_n) = \frac{3}{2} + z_n$ μας υπαγορεύει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $g(z) = \frac{3}{2} + z, z \in OC$. με άλλα λόγια οι συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές σε τόπο OC και το σύνολο ταυτισμού τους έχει σημείο συσσωρεύσεως που ανήκει στον τόπο, οπότε με βάση το θεώρημα ταυτισμού θα ισχύει $f = g$.

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $z_{2n} \rightarrow 0$ έχουμε $f(z_{2n}) = g(z_{2n})$ και με βάση το θεώρημα ταυτισμού $f = g$.

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $z_{2n+1} \rightarrow 0$ έχουμε $f(z_{2n+1}) = -g(z_{2n+1})$ και με βάση το θεώρημα ταυτισμού $f = -g$. Από τον συνδυασμό των δύο προηγούμενων προκύπτει $f = 0$, άτοπο που σημαίνει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του ερωτήματος.

Σχετικά με το τρίτο ερώτημα

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $z_n = \frac{1+1}{\sqrt{3n}} \in OC$ τότε $n = \frac{1}{3(z_n-1)^2}$ και $f(z_n) = \frac{27(z_n-1)^6+1}{54(z_n-1)^6+1}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ταυτισμού έχουμε $f(z) = \frac{27(z-1)^6+1}{54(z-1)^6+1}$.

Σχετικά με το τέταρτο ερώτημα ακολουθώντας πιστά τη διαδικασία του δεύτερου αποδείχνουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση.

Σχετικά με το πέμπτο ερώτημα.

Αν $z_n = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \in OC$ τότε $f(z_n) = \frac{\sin 2z_n - \cos z_n + e^{2z_n}}{2z_n}$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\frac{\sin 2z - \cos z + e^{2z}}{2z}, z \neq 0$ που φαίνεται να μην επαρκεί για να εφαρμόσουμε το θεώρημα ταυτισμού. Παρατηρούμε όμως ότι το όριο της στο μηδέν υπάρχει και ισούται με 4. (Παρακαλούμε να το υπολογίστε χωρίς χρήση κανόνα Hospital). Με βάση το θεώρημα επέκτασης

του Riemman η συνάρτηση επεκτείνεται αναλυτικά στο μηδέν με την τιμή 4. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα ταυτισμού οπότε $f(z) = \frac{\sin 2z - \cos z_n + e^{2z}}{2z}$ όταν $z \neq 0$ και $f(0) = 4$.

Σχετικά με το έκτο ερώτημα έχουμε,

$$z_n = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1 \in OC, f(z_n) = \text{Log}\left(\frac{5z_n-2}{4z_n-1}\right)$$

οπότε $f(z) = \text{Log}\left(\frac{5z-2}{4z-1}\right)$ υπό την προϋπόθεση ότι ο τόπος δεν περιλαμβάνει κανένα σημείο του διαστήματος $[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}]$ που δεν επεκτείνεται αναλυτικά η προηγούμενη συνάρτηση.

Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα έχουμε, $z_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 \in OC$, $n = \frac{1}{z_n-1}, f(z_n) = z_n^{\frac{1}{z_n-1}} = e^{\frac{1}{z_n-1} \text{Log} z_n}$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα ταυτισμού παίρνουμε $f(z) = e^{\frac{1}{z} \text{Log} z}$.

40. Αν f, g αναλυτικές συναρτήσεις σε τόπο OC που η f δεν είναι η μηδενική και η g έχει παράγουσα την G , z_n ακολουθία στοιχείων του τόπου με $z_n \rightarrow z_0 \in OC$ και επί πλέον ισχύει $f'(z_n) = f(z_n)g(z_n), n = 1, 2, \dots$ τότε $f = ce^G$ με $c \neq 0$.

Λύση.

Επειδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του θεωρήματος ταυτισμού στην συνάρτηση $f' - fg$ έχουμε $f' - fg = f' - fG' = 0$. Συνεχίζουμε με την γνωστή διαδικασία λύσης της στοιχειώδους διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή $e^{-G}f' - e^{-G}fG' = (e^{-G}f)' = 0$ οπότε $e^{-G}f = c$ και $f = ce^G$ με $c \neq 0$.

Στην γενικότερη περίπτωση που η συνάρτηση g δεν έχει παράγουσα στον τόπο μπορούμε να την περιορίσουμε σε οποιοδήποτε δίσκο με κέντρο το z_0 που επειδή είναι κυρτός τόπος έχει παράγουσα σε αυτόν και επιλύουμε το πρόβλημα σε αυτόν. Επειδή κάθε λύση έχει το πολύ μία μοναδική επέκταση σε όλο τον τόπο εξετάζουμε αν υπάρχει τέτοια. Αν δεν υπάρχει τότε δεν έχουμε λύση σε ολόκληρο τον τόπο.

Όλα τα παραπάνω δεν είναι αναγκαία στην περίπτωση που μπορούμε την g να την θέσουμε στην μορφή $g = \frac{h'}{h}$ οπότε από την σχέση $f' - fg = f'h - fh' = 0$ παίρνουμε $(\frac{f}{h})' = 0$ και $f = ch$.

41. Να ευρεθούν οι μη μηδενικές συναρτήσεις αναλυτικές συναρτήσεις σε τόπο OC στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$1. n^2 f'(\frac{1}{\sqrt{n}}) = f(\frac{1}{\sqrt{n}})(2n^2 + 1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^4}), 0 \in OC$$

$$2. f'(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n})(\cos(\frac{1+n}{n}) + \sin \frac{1}{3n} - e^{\frac{5}{n}} + \text{Log}(\frac{2n+1}{2n})), 0 \in OC.$$

$$3. f'(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})(\frac{n^2+2n+3}{n^3+n^2+n+1}), 0 \in OC.$$

$(n = 1, 2, 3 \dots)$.

Λύση. Σχετικά με το ερώτημα 1.

Θέτουμε $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \in OC$, οπότε $f'(z_n) = f(z_n)(2 + z_n^4 + z_n^{10} + 3z_n^{16})$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(z) = (2 + z^4 + z^{10} + 3z^{16})$ που έχει παράγουσα σε όλο το μιγαδικό επίπεδο την $G(z) = 2z + \frac{z^5}{5} + \frac{z^{11}}{11} + \frac{3z^{17}}{17}$. Αντιγράφοντας στη συνέχεια την προηγούμενη απόδειξη και παίρνουμε $f = ce^G$ με $c \neq 0$.

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα .

Θέτουμε $z_n = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \in OC$ οπότε

$$f'(z_n) = f(z_n)(\cos(1 + 2z_n) + \sin(\frac{2z_n}{3}) - e^{10z_n} + \text{Log}(z_n + 1)), \quad 0 \in OC.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z) = (\cos(1 + 2z) + \sin(\frac{2z}{3}) - e^{10z} + \text{Log}(z + 1)).$$

Για την παράγουσα εφαρμόζονται κοντά στο μηδέν οι κλασικές μέθοδοι εύρεσης του αορίστου ολοκληρώματος οπότε

$$G(z) = \frac{\sin(1 + 2z)}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{2z}{3} - \frac{1}{10} e^{10z} + (z + 1)\text{Log}(z + 1) - \text{Log}(z + 1).$$

και $f = ce^G$ με $c \neq 0$ υπό την προϋπόθεση ότι ο τόπος δεν περιέχει κανένα σημείο της πραγματικής ημιευθείας $x \leq -1$ που δεν επεκτείνεται αναλυτικά η συνάρτηση $\text{Log}(z + 1)$.

Σχετικά με το τρίτο ερώτημα. Θέτουμε $z_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \in OC$, οπότε

$$f'(z_n) = f(z_n) \left(\frac{3z_n^2 + 2z_n + 1}{1 + z_n + z_n^2 + z_n^3} \right)$$

και με το θεώρημα ταυτισμού

$$f'(z) = f(z) \left(\frac{3z^2 + 2z + 1}{1 + z + z^2 + z^3} \right) = f(z) \frac{h'(z)}{h(z)}$$

όπου $h(z) = 1 + z + z^2 + z^3$. Από την τελευταία σχέση άμεσα προκύπτει $(\frac{f}{h})' = 0$ ή $f = ch$.

42. Αν G το εσωτερικό κυρτού πολυγώνου με κορυφές $z_1, z_2, \dots, z_k$ και $a > 0$ να αποδειχθεί ότι $\sup_{z \in G} |z|^a = \max\{|z_1|^a, \max |z_2|^a \dots |z_k|^a\}$ επιταχύνοντας την απόδειξη με την χρήση της αρχής μεγίστου. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η διάμετρος της επιφάνειας $\overline{G}$ και η απόσταση $d(0, \overline{G})$

Λύση.

Καταρχήν $\sup_{z \in G} |z|^a = (\sup_{z \in G} |z^2|)^{\frac{a}{2}}$. Από την αρχή του μεγίστου έχουμε ότι

$(\sup_{z \in G} |z^2|) = (\max_{z \in \partial G} |z^2|)$ όπου ∂G το σύνορο του G δηλαδή η κυρτή πολυγωνική γραμμή. Θα βρούμε τα επί μέρους μέγιστα σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ξεχωριστά.

$$\max_{z \in [z_k, z_{k+1}]} |z^2| = \max_{t \in [0,1]} |tz_k + (1-t)z_{k+1}|^2 = \max_{t \in [0,1]} t^2|z_k|^2 + (1-t)^2|z_{k+1}|^2 + 2(1-t)Re(z_k \bar{z}_{k+1})$$

Επειδή ο συντελεστής του t^2 στο παραπάνω δευτεροβάθμιο πολυώνυμο είναι θετικός το μέγιστο θα λαμβάνεται σε ένα από τα άκρα δηλαδή για $t = 0$ ή $t = 1$ και επομένως θα έχει την τιμή $\max(|z_k|^2, |z_{k+1}|^2)$. Το γενικό συμπέρασμα είναι τώρα προφανές αν θεωρήσουμε την παραπάνω σχέση σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα.

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα .

Σταθεροποιώντας ένα $a \in \bar{G}$ και εφαρμόζοντας το προηγούμενο στην κυρτή πολυγωνική επιφάνεια $-a + G$ έχουμε ότι $\max_{z \in \bar{G}} |z - a| = \max_k |z_k - a|$. Σταθεροποιώντας ένα z_k μεταβάλλοντας το a έχουμε ότι $\max_{a \in \bar{G}} |z_k - a| = \max_m |z_k - z_m|$ και τελικά η διάμετρος δίνεται από την σχέση $\sup_{a,b \in \bar{G}} |a - b| = \max_{a,b \in \bar{G}} |a - b| = \max_{k,m} |z_k - z_m|$, δηλαδή το αναμενόμενο μέγιστο μήκος που προκύπτει θεωρώντας πλευρές και διαγωνίους.

Σχετικά με το τρίτο ερώτημα αυτό που μας ζητάει είναι να βρούμε το $\inf_{z \in \bar{G}} |z|$.

Επειδή $\bar{G}$ είναι συμπαγές το $\inf$ μπορεί να αντικατασταθεί με $\min$ και η ποσότητα παίρνει τελικά την μορφή $(\min_{z \in \bar{G}} |z^2|)^{\frac{1}{2}}$. Αν $0 \in \bar{G}$ είναι προφανές ότι το ζητούμενο ελάχιστο είναι μηδέν. Αν αυτό δεν συμβαίνει ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου με την συνάρτηση z^2 ακολουθώντας ανάλογη όπως προηγούμενως διαδικασία. Επειδή θα αναζητήσουμε το ζητούμενο ελάχιστο σαν μέτρο σημείου του συνόρου δηλαδή σημείου κάποιας πλευράς γεωμετρικά είναι φανερό ότι αν η κάθετος από την αρχή σε μια πλευρά την τέμνει στο εσωτερικό της τότε τα άκρα θα αποκλείονται γιατί η απόσταση μέσω της καθέτου είναι μικρότερη. Πράγματι αναζητώντας την ελάχιστη τιμή $|z_k^*|^2$ του προηγούμενου πολυωνύμου $P_k(t) = t^2|z_k + z_{k+1}|^2 - 2tRe\bar{z}_k(z_{k+1} - z_k) + |z_{k+1}|^2$ ταυτίζεται με

$P_k(\frac{Re\bar{z}_k(z_{k+1} - z_k)}{|z_k - z_{k+1}|^2})$ όταν $0 < \frac{Re\bar{z}_k(z_{k+1} - z_k)}{|z_k - z_{k+1}|^2} < 1$ και $\min(|z_k|^2, |z_{k+1}|^2)$ σε κάθε άλλη περίπτωση.

Είναι τώρα φανερό ότι το η ζητούμενη απόσταση ισούται με $\min |z_k^*|^a$.

Συνιστούμε στον αναγνώστη να επαναλάβει την παραπάνω διαδικασία σε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα Πχ Το τρίγωνο με κορυφές $1 + i, 3 +$

ι, 3 - ι οργανώνοντας μια λύση που να μην φαίνεται ότι γνωρίζει την γενική περίπτωση.

43. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές σε κλειστό δίσκο $D[a, r]$ να αποδειχθεί ότι

$$\max_{z \in D[a, r]} (|f(z)| + |g(z)|) = \max_{z \in C(a, r)} (|f(z)| + |g(z)|)$$

Λύση.

Η απλή αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση που θα χρειαστούμε είναι $\max_{\theta, \phi \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}(e^{i\theta}a + e^{i\phi}b) = |a| + |b|$.

Από από την αρχή του μεγίστου έχουμε

$$\max_{z \in D[a, r]} \operatorname{Re}(e^{i\theta}f(z) + e^{i\phi}g(z)) = \max_{z \in D[a, r]} \operatorname{Re}(e^{i\theta}f(z) + e^{i\phi}g(z))$$

και στη συνέχεια

$$|f(z)| + |g(z)| = \max_{\theta, \phi} \operatorname{Re}(e^{i\theta}f(z) + e^{i\phi}g(z)) \leq$$

$$\max_{\theta, \phi} \max_{z \in C(a, r)} \operatorname{Re}(e^{i\theta}f(z) + e^{i\phi}g(z)) \leq \max_{C(a, r)} (|f(z)| + |g(z)|).$$

Επειδή η προηγούμενη ανισότητα ισχύει για κάθε $z \in D[a, r]$ θα ισχύει και γι αυτή που δίνει την μεγίστη τιμή, δηλαδή

$$\max_{z \in D[a, r]} (|f(z)| + |g(z)|) \leq \max_{z \in C(a, r)} (|f(z)| + |g(z)|)$$

Το $\geq$ είναι προφανές.

44. Αν σε μη σταθερή συνάρτηση αναλυτική f ορισμένη σε τόπο OC ισχύει $\operatorname{Re} f \geq 0$ αποδείξτε ότι $\operatorname{Re} f(z) > 0$ για κάθε $z \in OC$.

Λύση. Αν συνέβαινε $\operatorname{Re} f(z_0) = 0$ επειδή πρόκειται για μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση σε τόπο από την αρχή του ελαχίστου για πραγματικά έχουμε ότι υπάρχει $z_1 \in OC$ με $\operatorname{Re} f(z_1) < \operatorname{Re} f(z_0) = 0$ που συγκρούεται με την υπόθεση $\operatorname{Re} f \geq 0$,

45. Αν f αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $D(0, 4)$ και επιπλέον ισχύει $|f(z)| < 6 - \log(5 - |z|) - |z|^{\frac{1}{2}} - |z|$ για κάθε $z \in D(0, 4)$ αποδείξτε ότι $f = 0$.

Λύση.

Θεωρούμε τυχόν $\zeta \in D(0, 4)$ με $r > |\zeta|$ και εφαρμόζοντας την αρχή του μεγίστου έχουμε

$|f(\zeta)| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| \leq 6 - \text{Log}(5-r) - r^{\frac{1}{2}} - r$ οπότε για $r \rightarrow 4$ παίρνουμε $|f(\zeta)| \leq 0$.

46. Αν f αναλυτική συνάρτηση σε τόπο OC και υπάρχει $a \in OC$ ώστε $|f(z)| \geq |f(a)| > 0$ σε ανοικτή περιοχή του a να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στον τόπο

Λύση.

Αν η συνάρτηση δεν είναι σταθερή στην περιοχή του a επειδή δεν έχει ρίζες σε αυτή επιτρέπεται η εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου σύμφωνα με την οποία αποκλείεται το να παίρνει η συνάρτηση ελάχιστη τιμή στο a διότι είναι εσωτερικό σημείο. Επειδή η υπόθεση μας το δίνει σαν θέση ελαχίστου προκύπτει ότι η συνάρτηση θα είναι σταθερή στην περιοχή. Από το θεώρημα ταυτισμού προκύπτει ότι είναι σταθερή στον τόπο.

47. Αν f αναλυτική συνάρτηση σε τόπο OC και υπάρχει κλειστή καμπύλη γ στον τόπο τέτοια ώστε $\text{Ref}(z) \geq 0$ για κάθε $z \in \gamma^*$ να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στον τόπο.

Λύση.

Αν G το εσωτερικό της καμπύλης τότε $\gamma^* = \partial G$ και η λύση δίνεται στο σχετικό παράδειγμα του εδαφίου της αρχής του μεγίστου.

(Την υπόθεση $\text{Ref}(z) \geq 0$ για κάθε $z \in \gamma^*$ μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με $a\text{Ref} + b\text{Im}f + c \geq 0$ για κάθε $z \in \gamma^*$ με $a + ib \neq 0$. Επίσης στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στον τόπο μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με την υπόθεση ότι το μέτρο παραμένει σταθερό επάνω στο ίχνος της καμπύλης.)

48. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στον κλειστό δίσκο $D[0, 1]$ αναλυτική στον ανοικτό $D(0, 1)$ και επιπλέον υποθέτουμε ότι ισχύει $|f(z)| = c$ στον κύκλο $C(0, 1)$.

Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ οι ρίζες της συνάρτησης στον ανοικτό δίσκο μετρώντας και την πολλαπλότητα, να αποδειχθεί ότι $f(z) = c_1 g(z)$ με $|c_1| = |c|$ και

$$g(z) = \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} \frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z} \dots \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z} \text{ για κάθε } z \in D[0, 1].$$

Λύση. Επειδή $|\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}| < 1$ στον ανοικτό δίσκο $D(0, 1)$ και $|\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}| = 1$ στον κύκλο $C(0, 1)$ έχουμε

$|g(z)| < 1$ στον ανοικτό δίσκο $D(0, 1)$ και $|g(z)| = 1$ στον κύκλο $C(0, 1)$ οπότε $|\frac{f(z)}{g(z)}| = |c|$ στον κύκλο $C(0, 1)$. Επειδή οι συναρτήσεις f, g έχουν τις ίδιες ρίζες στην ίδια πολλαπλότητα το πηλίκο τους $\frac{f}{g}$ θα επεκτείνεται στον

ανοικτό δίσκο σε συνάρτηση h χωρίς ρίζες σε αυτόν οπότε στην συνάρτηση h εφαρμόζονται και η αρχή του μεγίστου και του ελαχίστου. Το παραπάνω σημαίνει ότι η μεγίστη και η ελαχίστη τιμή της συνάρτησης h παίρνονται στο σύνορο οπότε ταυτίζονται με $|c|$. Εφόσον η ελαχίστη τιμή και η μεγίστη συμπίπτουν η συνάρτηση $|h|$ είναι σταθερή στον κλειστό δίσκο. Από το παραπάνω προκύπτει κατά τα γνωστά ότι και η $h(z) = c_1$ στον ανοικτό δίσκο και παίρνοντας το όριο προκύπτει $h(z) = c_1$ στον κλειστό που είναι το ζητούμενο.

49. Αν γ_1, γ_2 θετικά προσανατολισμένες καμπύλες που τα ίχνη τους περιγράφονται από τις σχέσεις

$$\gamma_1 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ με } x \geq 0, y \geq 0, \gamma_2 : x^2 + y^2 = 1, \text{ με } x \leq 0, y \leq 0 \text{ και } \gamma_3 = [-i, 1]$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_{\gamma_1} f_k(z) dz, \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f_k(z) dz, \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} f_k(z) dz \text{ με } f_1(z) = \bar{z} \text{ και } f_2(z) = \sin^2 z$$

Λύση.

Θέτουμε

$$z = \gamma_1(t) = \cos t + 2i \sin t \text{ με } t \in [0, \pi], dz = (-\sin t + 2i \cos t) dt \text{ και } \bar{z} = \cos t - 2i \sin t \text{ οπότε}$$

$$\int_{\gamma_1} f_1(z) dz = \int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_0^\pi (2i + \frac{3 \cos 2t}{2}) dt = 2\pi i.$$

Θέτουμε

$$z = \gamma_2(t) = e^{it}, \bar{z} = e^{-it} \text{ με } t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \text{ και } dz = ie^{it} dt \text{ οπότε}$$

$$\int_{\gamma_2} f_1(z) dz = \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} i dt = \frac{\pi i}{2}.$$

Θέτουμε

$$z = \gamma_3(t) = t(1+i) - i \text{ με } t \in [0, 1] \bar{z} = t(1-i) + i \text{ και } dz = (1+i) dt \text{ οπότε}$$

$$\int_{\gamma_3} f_1(z) dz = \int_{\gamma_3} \bar{z} dz = \int_0^1 (2t + i - 1) dt = i.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα.

Σχετικά με την συνάρτηση $f_2(z) = \sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2z}{2}$ παρατηρούμε ότι έχει παράγουσα την $F(z) = \frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}$ οπότε

$$\int_{\gamma_1} f_2(z) dz = F(-1) - F(1), \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f_2(z) dz = F(i) - F(1)$$

και

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} f_2(z) dz = F(1) - F(1) = 0.$$

50. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_n = \int_{\gamma_n} \text{Log} z dz$ όπου γ_n είναι η πολυγωνική γραμμή $[-1 - \frac{i}{n}, -1 - i, 1, 1 - i, -1 + \frac{i}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim I_n$.

Λύση.

Αν θεωρήσουμε τον τόπο $C_{-\pi}$ που προκύπτει αν από το επίπεδο αφαιρέσουμε την αρνητική

ημιευθεία και το μηδέν τότε η συνάρτηση $\text{Log} z$ έχει παράγουσα σε αυτόν την συνάρτηση $F(z) = z \text{Log} z - z$ και επειδή η πολυγωνική γραμμή περιέχεται στον τόπο έχουμε

$$I_n = F(-1 + \frac{i}{n}) - F(-1 - \frac{i}{n}) = (-1 + \frac{i}{n}) \text{Log}(-1 + \frac{i}{n}) - (-1 + \frac{i}{n}) - (-1 - \frac{i}{n}) \text{Log}(-1 - \frac{i}{n}) + (-1 - \frac{i}{n}).$$

Θεωρούμε την ακολουθία $\text{Arg}(-1 - \frac{i}{n})$ παρατηρούμε ότι $(-1 - \frac{i}{n}) \rightarrow -1$ από το κάτω ημιεπίπεδο οπότε

$$\text{Arg}(-1 - \frac{i}{n}) \rightarrow -\pi \text{ και } \text{Log}(-1 - \frac{i}{n}) = \text{Log}|(-1 - \frac{i}{n})| + i \text{Arg}(-1 - \frac{i}{n}) \rightarrow -\pi.$$

Ομοίως παίρνουμε ότι $\text{Log}(-1 + \frac{i}{n}) \rightarrow \pi$ οπότε $\lim I_n = 2\pi$.

51. Να υπολογιστεί σε μορφή σειράς το ολοκλήρωμα

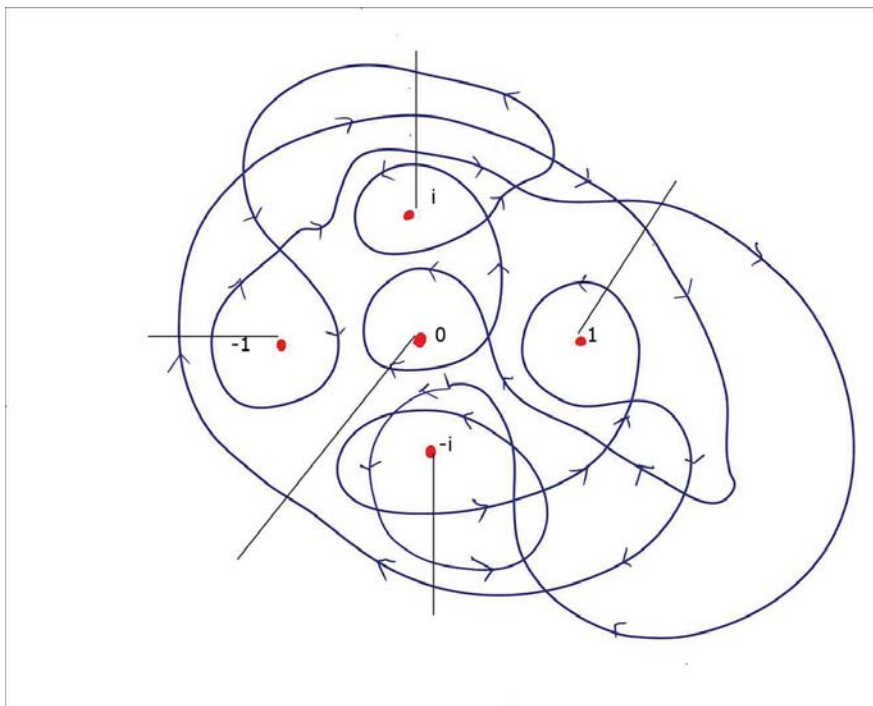
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(e^t) dt.$$

Λύση. Θέτουμε $z = e^t$, $dz = ie^t dt$, $dt = \frac{dz}{iz}$ οπότε έχουμε $I = \int_{\gamma} \frac{\sin z}{iz} dz$ με γ το πρώτο θετικά προσανατολισμένο τεταρτημόριο του μοναδιαίου κύκλου.

Αξιοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ παίρνουμε

$$\frac{\sin z}{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{i(2n+1)!} \text{ που έχει παράγουσα την } F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{i(2n+1)(2n+1)!} \text{ οπότε } I = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \dots$$

52. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{1-z^2} + \cos \frac{1}{z-i} + \frac{e^z}{z+i}$ υπεράνω της καμπύλης του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας εποπτικό υπολογισμό των δεικτών στροφής $n(\gamma, \pm 1)$, $n(\gamma, \pm i)$ χωρίς χρήση θεωρημάτων Cauchy.



Σχήμα 4.6:

Λύση.

Καταρχήν $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2} \frac{1}{z+i} - \frac{i}{2} \frac{1}{z-i}$ οπότε λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του δείκτη στροφής $n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ παίρνουμε

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = -\pi n(\gamma, -i) + \pi n(\gamma, i)$$

και ομοίως

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} dz = \pi i n(\gamma, 1) - \pi i n(\gamma, -1).$$

Αν από το ανάπτυγμα

$$\sin \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{3!(z-i)^3} + \dots$$

εξαιρέσουμε τον αρχικό όρο το υπόλοιπο μέρος έχει παράγουσα που σημαίνει ότι μηδενίζεται το ολοκλήρωμά του οπότε

$$\int_{\gamma} \sin \frac{1}{z-i} = \int_{\gamma} \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i n(\gamma, i).$$

$$\frac{e^z}{z+i} = e^{-i} \frac{e^{z+i}}{z+i} = \frac{e^{-i}}{z+i} (1 + (z+i) + \dots) = \frac{e^{-i}}{z+i} + \dots$$

έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z+i} = 2\pi i n(\gamma, -i).$$

Το άθροισμα των επιμέρους ολοκληρωμάτων δίνει το ζητούμενο. Μας απομένουν οι δείκτες στροφής. Ένας σίγουρος τρόπος εποπτικού υπολογισμού όσο σύνθετο σχήμα και αν έχουν οι κλειστές καμπύλες είναι ο εξής. Φέρουμε οποιαδήποτε ημιευθεία με αρχή το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής του. Για την δική μας διευκόλυνση προτιμάμε κάποια να τέμνει όσο λιγότερες φορές μπορούμε το ίχνος της καμπύλης. Στη συνέχεια σε κάθε σημείο που η ημιευθεία τέμνει το ίχνος της καμπύλης αντιστοιχούμε τον αριθμό $+1$ ή -1 ανάλογα αν την τέμνει κατά την θετική ή αρνητική φορά. Το αλγεβρικό άθροισμα δίνει τον δείκτη στροφής. Αν η ημιευθεία δεν τέμνει ο δείκτης στροφής είναι μηδέν. Στην περίπτωση μας $n(\gamma, 1) = 1 - 1 - 1 = -1$, $n(i, \gamma) = +1 - 1 - 1 + 1 = 0$, $n(\gamma, 0) = -1 - 1 = -2$, $n(\gamma, -i) = +1 + 1 - 1 = 1$, $n(\gamma, -1) = -1 - 1 = -2$

53. Αν μια αναλυτική συνάρτηση f παρουσιάζει μεμονωμένη ανωμαλία στο μηδέν βρείτε τις δυνατές ανωμαλίες στις παρακάτω περιπτώσεις.

1. $f(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$. 2. $f(\frac{1}{n}) \rightarrow +\infty$ 3. $f(\frac{1}{2n}) \rightarrow 1$ και $f(\frac{1}{2n+1}) \rightarrow -1$. 4. $f(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$ και 5. $f(\frac{i}{n}) \rightarrow +\infty$. Στην περίπτωση 3 εξετάστε αν υπάρχει $z_n \rightarrow 0$ με $f(z_n) \rightarrow +\infty$ και στην περίπτωση 4 αν υπάρχει $z_n \rightarrow 0$ με $f(z_n) \rightarrow 8$.

Λύση. Στην πρώτη περίπτωση αποκλείεται η περίπτωση του πόλου οπότε οι ενδεχόμενες ανωμαλίες είναι ουσιώδης ή απαλείψιμη. Στην δεύτερη περίπτωση αποκλείεται η απαλείψιμη. Στην τρίτη και τέταρτη περίπτωση εφόσον δεν έχουμε ενιαίο όριο αποκλείονται ο πόλος και το απαλείψιμο οπότε θα έχουμε ουσιώδη ανωμαλία και από το θεώρημα C-W οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου αποτελεί όριο κατάλληλης ακολουθίας $f(z_n)$ με $z_n \rightarrow 0$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι όριο τέτοιας ακολουθίας είναι και το $+\infty$. Πραγματι εφόσον το $f(D(0, \frac{1}{n}))$ είναι πυκνό στο μιγαδικό επίπεδο σύμφωνα με το θεώρημα C-W υπάρχει $z_n \in D(0, \frac{1}{n})$ με $f(z_n) \in D(n, 1)$ οπότε $z_n \rightarrow 0$ και $f(z_n) \rightarrow +\infty$.

Τα παραπάνω δεν αποτελούν ολοκληρωμένη απάντηση διότι πρέπει να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω περιπτώσεις είναι και δυνατές, δηλαδή κάθε περίπτωση πρέπει να συνοδευτεί και με αντίστοιχο παράδειγμα.

Σχετικά με την περίπτωση 1 . Οι συναρτήσεις $\frac{z^2}{z}$, $ze^{\frac{2\pi}{z}}$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις αλλά το μηδέν στην πρώτη είναι απαλείψιμο στην δεύτερη ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Σχετικά με την περίπτωση 2 . Οι συναρτήσεις $\frac{1}{z}$, $\frac{e^{\frac{2\pi}{z}}}{z}$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις αλλά το μηδέν στην πρώτη είναι πόλος και στην δεύτερη ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Η συνάρτηση $e^{\frac{2\pi i}{z}}$ αποτελεί κατάλληλο παράδειγμα για την περίπτωση 3. και η συνάρτηση $ze^{\frac{2\pi i}{z}}$ αποτελεί κατάλληλο παράδειγμα για την περίπτωση 4.

54. 1. Χαρακτηρίστε την ανωμαλία στο μηδέν των συναρτήσεων $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$ με την βοήθεια της τάξης της του ως ρίζα των συναρτήσεων

$$f(z) = z^2(e^{2z^2} - 2z^2 - 1) \text{ και } g(z) = 3 \sin(z^9) + z^{39} - z^9.$$

2. Με τον ίδιο τρόπο χαρακτηρίστε όλα τα ανώμαλα σημεία στην περίπτωση $f(z) = z \sin z$, $g(z) = \cos z$.

Λύση. Επειδή $g'(z) = z^8 h(z)$, $h(z) = 27 \cos(z^9) + 39z^{30} - 9$ και $h(0) \neq 0$, το μηδέν είναι ρίζα τάξης 8 στην g' και επομένως τάξης 9 στην g .

Αν το μηδέν είναι ρίζα τάξης k στην f τότε προφανώς έχει τάξη $k - 2$ στην συνάρτηση $(e^{2z^2} - 2z^2 - 1)$, $k - 3$ στην παράγωγο της $4z(e^{2z^2} - 1)$, $k - 4$ στην $((e^{2z^2} - 1))$ και $k - 5$ στην παράγωγο της $4z(e^{2z^2})$. Τώρα είναι προφανές ότι $k - 5 = 1$.

Με βάση τα παραπάνω το μηδέν είναι πόλος τάξης $9 - 6 = 5$ στην $\frac{f}{g}$ και ρίζα τάξης $9 - 6 = 5$ στην $\frac{g}{f}$.

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα εύκολα διαπιστώνουμε ότι το μηδέν είναι ρίζα τάξης 2 και οι αριθμοί $k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2 \dots$ απλές ρίζες στην f . Επίσης οι αριθμοί $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = \pm 1, \pm 2 \dots$ είναι απλές ρίζες στην g . Επειδή δεν υπάρχει κοινή ρίζα των συναρτήσεων προκύπτει ότι οι ρίζες της g αποτελούν απλούς πόλους στην $\frac{f}{g}$, το μηδέν πόλο δευτέρας τάξης και οι υπόλοιπες ρίζες της f απλοί πόλοι στην $\frac{g}{f}$.

55. Αν $z_1, z_2, a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq b$ δώστε παραδείγματα αναλυτικών συναρτήσεων στο $\mathbb{C} - \{z_1, z_2\}$ με $Re(f, z_1) = a$, $Re(f, z_2) = b$ στις παρακάτω περιπτώσεις

1. z_1 πόλος τάξης k , z_2 πόλος τάξης m .
2. z_1 πόλος τάξης k , z_2 ουσιώδες ανώμαλο.
3. z_1 ουσιώδες ανώμαλο, z_2 ουσιώδες ανώμαλο.

Λύση.

Αν

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-z_1)^k} + \frac{a}{z-z_1}, f_2(z) = \frac{1}{(z-z_2)^m} + \frac{b}{z-z_2} \text{ και } f_3(z) = e^{\frac{a}{z-z_1}}, f_4(z) = e^{\frac{b}{z-z_2}}$$

τότε οι συναρτήσεις $g_1 = f_1 + f_2$, $g_2 = f_1 + f_4$ και $g_3 = f_3 + f_4$ ικανοποιούν την πρώτη, την δεύτερη και την τρίτη περίπτωση αντίστοιχα.

56. Αν z_0 απαλείψιμο, πόλος τάξης k , ουσιώδες ανώμαλο σημείο συνάρτησης f τότε είναι απαλείψιμο πόλος τάξης $k+1$ ουσιώδες ανώμαλο αντίστοιχα στην συνάρτηση f' . Με την βοήθεια του παραπάνω αποδείξτε ότι αν z_0 είναι πόλος της συνάρτησης f τότε είναι ουσιώδες ανώμαλο στην συνάρτηση e^f .

Λύση.

Παίρνοντας τα αναπτύγματα Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ των συναρτήσεων f και f' αντίστοιχα και συσχετίζοντάς τα με τους ορισμούς των ανώμαλων σημείων στην κάθε περίπτωση προκύπτει άμεσα το πρώτο μέρος. Από το πρώτο μέρος επίσης προκύπτει ότι αποκλείεται η παράγωγος να έχει να έχει το z_0 πόλο τάξης 1.

Αν z_0 είναι πόλος τάξης m της συνάρτησης e^f οπότε είναι πόλος τάξης $m+1$ της συνάρτησης $(e^f)' = f'e^f$ που σημαίνει ότι είναι πόλος τάξης ένα στην f' κάτι που έχει αποκλειστεί. Αν z_0 είναι απαλείψιμο και ρίζα τάξης m της συνάρτησης επέκτασης της e^f τότε είναι πόλος τάξης m της συνάρτησης $\frac{1}{e^f} = e^{-f}$ οπότε επανερχόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Αν z_0 είναι απαλείψιμο στη συνάρτηση e^f χωρίς να είναι ρίζα της επέκτασης τότε είναι απαλείψιμο και στην συνάρτηση $\frac{(e^f)'}{e^f} = f'$ διότι με βάση το πρώτο σκέλος και την υπόθεση θα είναι πόλος στην f' . Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι του ουσιώδους ανώμαλου σημείου.

57. Αν f ακεραία συνάρτηση αποδείξτε ότι

$$n! \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = (n-k)! \int_{\gamma} \frac{f^{(k)}(z)}{(z-a)^{n+1-k}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Λύση. Παίρνουμε δύο φορές την τιμή $f^{(n)}(a)$ με τον τύπο του Cauchy. Την πρώτη φορά τον εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f για την n -τάξης παράγωγο και την δεύτερη φορά στην συνάρτηση $f^{(k)}$ για την $(n-k)$ - τάξης παράγωγο.

58. Να γενικεύσετε το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{0\}$.

Λύση.

Αν θεωρήσουμε τα αναπτύγματα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \quad f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n(z-a)^{n-1}$$

τότε

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \dots + \frac{a_n}{z-a} + \dots, \quad \frac{f'(z)}{(z-a)^n} = \dots + \frac{n a_n}{z-a} + \dots,$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i n(\gamma, a) a_n, \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z-a)^n} dz = 2\pi i n(\gamma, a) n a_n = n \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(n-1)!$ παίρνουμε το ζητούμενο για την πρώτη παράγωγο και συνεχίζοντας διαδοχικά παίρνουμε το συμπέρασμα για οποιοδήποτε k .

59. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$z^{2n} \sin^{2k} \frac{1}{z}, \quad z^{2n+1} \sin^{2k+1} \frac{1}{z}, \quad (z-1)^{2n} \cos^k \frac{1}{(z-1)^n}, \quad \cos \frac{1}{2z-1} e^{(z-\frac{1}{2})^2}.$$

Να αποδειχθεί ότι όπου έχουν νόημα τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των παραπάνω συναρτήσεων σε κλειστές καμπύλες είναι μηδέν.

Λύση. Η απόδειξη στηρίζεται στην εξής απλή αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη παρατήρηση. Αν μια αναλυτική συνάρτηση είναι άρτια το ανάπτυγμα Laurent εκφράζεται σαν άθροισμα όρων άρτιας τάξης με την έννοια ότι οι περιττές τάξης μηδενίζονται οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο μηδέν είναι μηδέν. Αν είναι περιττή μηδενίζονται οι όροι άρτιας τάξης. Το πρώτο προκύπτει άμεσα από την σχέση $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = f(z) = f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n a_n z^n$, οπότε $a_{2k+1} = 0$. Γενικότερα αν η συνάρτηση είναι “άρτια ως προς $z-a$ ” δηλαδή $f(a+Z) = f(a-Z)$, $Z = z-a$ τότε το ανάπτυγμα Laurent στο a εκφράζεται σαν άθροισμα όρων άρτιας τάξης και το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι μηδέν. Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος έχουν ακριβώς ένα ανώμαλο σημείο και είναι έχουν την προηγούμενη ιδιότητα να είναι συμμετρικές ως προς αυτό οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο και ως εκ τούτου το ολοκλήρωμα είναι μηδέν.

60. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$z^{2n+1} \sin^{2k} \frac{1}{z}, \quad z^{2n} \sin^{2k+1} \frac{1}{z}, \quad (z-1)^{2n+1} \cos^k \frac{1}{(z-1)^n}, \quad \cos \frac{1}{2z-1} e^{(z-\frac{1}{2})^3}.$$

Να αποδειχθεί ότι ό ολοκληρώματα των παραπάνω συναρτήσεων υπεράνω της καμπύλης $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ είναι μηδέν.

Λύση.

Επειδή σε όλες τις περιπτώσεις τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία είναι στο εξωτερικό της καμπύλης οι δείκτες στροφής μηδενίζονται οπότε θα μηδενίζονται και τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

61. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπεράνω της καμπύλης $C(0, 4)$ των συναρτήσεων.

$$z^{339k-1} \sin \frac{1}{z^k}, \quad z^{339k} \sin \frac{1}{z^k}, \quad z^2 \cos \frac{1}{(3z-1)}, \quad z \cos^2 \frac{z}{(3z-1)}.$$

Λύση.

Επειδή

$$z^{339k-1} \sin \frac{1}{z^k} = z^{339k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z^k}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{k(2n+1)-339k+1}},$$

η σχέση $k(2n+1) - 339k + 1 = 1$ δίνει $n = 169$, ο αντίστοιχος συντελεστής που ταυτίζεται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι $\frac{-1}{339!}$ και επειδή ο δείκτης στροφής είναι ένα το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι $\frac{-2\pi i}{339!}$.

Στο επόμενο ολοκλήρωμα ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στην εξίσωση $k(2n+1) - 339k = 1$ που δεν έχει ακέραια λύση. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος τάξης -1 που μας ενδιαφέρει έχει παραληφθεί από το άθροισμα επειδή έχει συντελεστή μηδέν. Επειδή το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι μηδέν θα μηδενίζεται και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

Επειδή η επόμενη συνάρτηση έχει μεμονωμένο ανώμαλο σημείο το $\frac{1}{3}$ για πρακτικούς λόγους θέτουμε

$$z - \frac{1}{3} = Z \text{ οπότε}$$

$$z^2 \cos \frac{1}{(3z-1)} = \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}Z + Z^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! 3^{2n+1} Z^{2n+1}} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! 3^{2n+1} Z^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! 3^{2n+1} Z^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! 3^{2n+1} Z^{2n}}.$$

Επιλέγοντας και αθροίζοντας τους συντελεστές τάξης -1 στα παραπάνω αθροίσματα βρίσκουμε ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο $\frac{1}{3}$ την τιμή $\frac{1}{9 \cdot 3} - \frac{1}{3! 3^3} + 0 = \frac{1}{54}$ οπότε το ολοκλήρωμα έχει την τιμή $\frac{2\pi i}{54}$.

62. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$I_n = \int_{C(0, n\pi)} \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

Λύση. Η εξίσωση $e^z + e^{-z} = 0$ ή ισοδύναμα $e^{2z} = -1 = e^{i\pi}$ δίνει ρίζες $z_k = i\frac{\pi}{2} + ik\pi, k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$. Η παράγωγος του παρανομαστή στις ρίζες του δεν μηδενίζεται οπότε είναι απλές. Επίσης καμία ρίζα δεν μηδενίζει τον αριθμητή οπότε αποτελούν πόλους πρώτης τάξης στο πηλίκο. Στην περίπτωση αυτή $\text{Res}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, z_k\right) = \left(\frac{(e^z - e^{-z})'}{(e^z + e^{-z})'}\right)_{z=z_k} = 1$

Η σχέση $z_k \in D(0, \pi n)$ δηλαδή $-\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi < \pi n$ ισοδυναμεί με $-n \leq k \leq n$ οπότε $I_n = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i(2n+1)$.

63. Να υπολογιστούν τα κύρια μέρη των αναπτυγμάτων Laurent με κέντρο το μηδέν και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων

$z^{91} \sin \frac{1}{z}, \frac{e^{2z^2-1}}{z^{99}}, \frac{1}{\sin^k z}$ για $k = 1, 2, 3, 4$, και $\frac{(e^z-1)^k}{\sin^{k+2} z}$ για οποιοδήποτε ακέραιο k .

Λύση.

Καταρχήν

$$z^{91} \sin \frac{1}{z} = z^{91} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1-90}}.$$

Για το κύριο μέρος παίρνουμε το άθροισμα των όρων με $2n+1 > 90$

δηλαδή το

$$\sum_{n=45}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1-90}}.$$

Για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο θέτουμε $2n+1-90=1$, δηλαδή $n=45$ που είναι ο συντελεστής $-\frac{1}{(91)!}$.

Η συνάρτηση $\frac{e^{2z^2-1}}{z^{99}}$ γραφεται

$$\frac{e^{-1}}{z^{99}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1} 2^n z^{2n-99}}{(2n)!}.$$

Για το κύριο μέρος παίρνουμε $2n < 99$ δηλαδή το $\sum_{n=0}^{49} \frac{e^{-1} 2^n z^{2n-99}}{(2n)!}$.

Για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο θέτουμε $2n - 99 = -1$,

δηλαδή $n = 49$ που αντιστοιχεί στον συντελεστή $\frac{e^{-1}2^{49}}{98!}$.

Επειδή $\frac{z}{\sin z} \rightarrow 1$ όταν $z \rightarrow 0$, Το μηδέν είναι πόλος πρώτης τάξης στην $\frac{1}{\sin z}$ το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο μηδέν είναι ένα και το κύριο μέρος είναι $\frac{1}{z}$.

Επειδή $\frac{z^2}{\sin^2 z} \rightarrow 1$ όταν $z \rightarrow 0$, το μηδέν είναι πόλος δευτέρας την $\frac{1}{\sin^2 z}$ οπότε,

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + \dots, \quad \frac{z^2}{\sin^2 z} = a_{-2} + a_{-1}z + \dots$$

Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια οι όροι περιτής τάξης στην σειρά μηδενίζονται οπότε $a_1 = 0$.

Από το όριο στο μηδέν του τελευταίου αναπτύγματος προκύπτει $a_{-2} = 1$ και κύριο μέρος $\frac{1}{z^2}$.

Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{\sin^3 z}$ είναι περιτή θα μηδενίζονται οι όροι αρτίας τάξης στο ανάπτυγμα Laurent και επειδή το μηδέν είναι πόλος τρίτης τάξης έχουμε την μορφή

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-1}}{z} + \dots$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την συνάρτηση με z^3 παίρνουμε την συνάρτηση

$$F(z) = \frac{z^3}{\sin^3 z} = a_{-3} + a_{-1}z^2 + \dots$$

που προφανώς επεκτείνεται αναλυτικά στο μηδέν. και ισχύει $F(0) = a_{-3}, \frac{F''}{2!}(0) = a_{-1} \dots$. Αν δεν παρέμβουμε στην παραπάνω μορφή θα χρειαστεί να υποστούμε επίπονη διαδικασία κόπωσης με πολλαπλές εφαρμογές του κανόνα Hospital. Θα το αποφύγουμε όμως κάνοντας έξυπνη χρήση γνωστών αναπτυγμάτων Taylor.

Στην περίπτωση μας γράφουμε

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots = zq(z), \quad q(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots, \quad q(0) = 1, 0 = q'(0), -\frac{1}{3!} = \frac{q''(0)}{2!}.$$

Επειδή $F(z) = \frac{1}{q^3(z)}$ έχουμε

$$a_{-3} + a_{-1}z^2 + \dots = F(z) = q^{-3}(z) = q^{-3}(0)z + \frac{(q^{-3})''(0)}{2!} + \dots$$

Επειδή

$$q^{-3}(0) = 1, (q^{-3})'(0) = (-3q^{-4}q')(0) = 0, (q^{-3})''(0) = (12q^{-5}q' - 3q^{-4}q'')(0) = 2$$

έχουμε $a_{-3} = 1, a_{-1} = 1$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κύριο μέρος ισούται με $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}$. και ότι το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο μηδέν με 1.

Ομοίως

$$\frac{1}{\sin^4 z} = \frac{a_{-4}}{z^4} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

οπότε

$$a_{-4} + a_{-2}z^2 + \dots = \frac{z^4}{\sin^4 z} = \frac{1}{q^4} = \left(\frac{1}{q^4}\right)(0) + \left(\frac{1}{q^4}\right)'(0)z + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{q^4}\right)''(0)z^2 + \dots$$

και τελικά

$$a_{-4} = 1, a_{-2} = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{q^4}\right)''(0) = \frac{1}{2}(20q^{-6}q' - 4q^{-5}q'')(0) = -\frac{2}{3}.$$

Προφανώς το κύριο μέρος είναι $\frac{1}{z^4} - \frac{2}{3z^3}$ και το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι όπως αναμενόταν μηδέν.

Ανάλογα εργαζόμενοι και στην τελευταία περίπτωση θέτουμε

$$e^z - 1 = zh, \quad h(z) = 1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \dots$$

οπότε

$$h(0) = 1, h'(0) = \frac{1}{2}, h''(0) = \frac{1}{3}, \frac{(e^z - 1)^k}{\sin^{k+2} z} = \frac{h^k}{z^2 q^{k+2}} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + \dots$$

και

$$a_{-2} = \left(\frac{h^k}{q^{k+2}}\right)(0) = 1, a_{-1} = \left(\frac{h^k}{q^{k+2}}\right)'(0) = \frac{k}{3}.$$

64. Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{0\}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt = 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z}, 0\right)$. στη συνέχεια υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} e^{ae^{ikt}} dt, \int_0^{2\pi} \cos(ae^{ikt}) dt, \int_0^{2\pi} \sin(ae^{ikt}) dt, \text{ και } \int_0^{2\pi} e^{a \cos kt} \cos(a \sin kt)$$

όπου a πραγματικός και k φυσικός αριθμός.

Λύση.

Αν θέσουμε $z = re^{it}$, $dz = ire^{it}dt$, $dt = \frac{dz}{iz}$ έχουμε

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt = \frac{1}{i} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z}, 0\right).$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω για $f(z) = e^{az^k}$.

Επειδή $z \frac{f(z)}{z} \rightarrow f(0) = 1$ όταν $z \rightarrow 0$ το μηδέν είναι πόλος πρώτης τάξης στην $\frac{f(z)}{z}$ ισχύει $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z}, 0\right) = 1$ οπότε με βάση το πρώτο σκέλος το ολοκλήρωμα θα έχει τιμή 2π .

Στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $\cos(az^k)$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία της προηγούμενης περίπτωσης.

Στην τρίτη περίπτωση χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $\sin(az^k)$ και επειδή το μηδέν είναι απαλείψιμο στην $\frac{\sin(az^k)}{z}$ το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Στην τελευταία περίπτωση αν δεν ξεφύγει από την προσοχή μας ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης του πρώτου ολοκληρώματος απαντάμε άμεσα ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ένα. Αν ξεφύγει θα έλθουμε στην κατάλληλη μορφή αν εφαρμόσουμε τον τύπο $\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$.

65. Αν p, q πολυώνυμα με βαθμός $[q]$ -βαθμός $[p] = k \geq 2$ αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^k p(z)}{q(z)}$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι υπάρχει $R > 0$ τέτοιος ώστε $\int_{C(0,r)} \frac{p(z)}{q(z)} = 0$ για κάθε $r > R$.

Λύση. Στο πρώτο ερώτημα έχουμε πηλίκο πολυωνύμων του ίδιου βαθμού και το όριο ισούται με το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων συντελεστών. Η διαδικασία της απόδειξης είναι γνωστή από το Λύκειο.

Επειδή υπάρχει το όριο η συνάρτηση θα είναι φραγμένη σε περιοχή του απείρου δηλαδή $|z^k \frac{p(z)}{q(z)}| \leq M$ ή $|\frac{p(z)}{q(z)}| \leq M|z|^{-k}$ για $|z| > r_0$. Θεωρώντας αρκετά μεγάλο $R > r_0$ ώστε ο δίσκος $D(0, R)$ να περιέχει όλες τις ρίζες ρ_i του παρανομαστή και οποιοδήποτε $r > R$ έχουμε ότι

$$\int_{C(0,r)} \frac{p(z)}{q(z)} = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, \rho_i\right).$$

Από την ανισότητα του Cauchy (ή επαναλαμβάνοντας στο συγκεκριμένη περίπτωση την διαδικασία απόδειξής της) παίρνουμε $|\int_{C(0,r)} \frac{p(z)}{q(z)}| \leq \frac{2\pi}{r^{k-1}}$. Επειδή το πρώτο σκέλος παραμένει σταθερό για $r > R$ και το δεύτερο έχει όριο το μηδέν για $r \rightarrow +\infty$ η σταθερή τιμή είναι μηδέν.

66. Αν στο προηγούμενο πρόβλημα έχουμε $q(z) = z^n + 1$ αποδείξτε ότι $\int_{C(0,r)} \frac{p(z)}{q(z)} = 0$ για οποιοδήποτε $r \neq 1$.

Λύση.

Επειδή όλες οι ρίζες του παρανομαστή έχουν μέτρο ένα αν η ακτίνα του κύκλου είναι μεγαλύτερη του ένα όλες οι ρίζες είναι στο εσωτερικό του οπότε από το προηγούμενο πρόβλημα έχουμε ότι το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Εάν αν η ακτίνα του κύκλου είναι μικρότερη του ένα όλες οι ρίζες είναι στο εξωτερικό του οπότε θα μηδενίζονται οι δείκτες στροφής και επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

67. Χαρακτηρίστε τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και υπολογίστε τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων

$$\frac{\sin^n z}{(e^{iz} - 1)^{k+n}}, \frac{\sin^n \frac{1}{z}}{(e^{\frac{1}{z}} - 1)^{k+n}}, k = 0, 1, 2, \dots, e^{\frac{3}{2z-1}} \cos\left(\frac{3}{2z-1}\right),$$
$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{1+z+z^2}, e^{\frac{2}{z}} - \frac{2^3}{3!z^3} - \frac{2^4}{4!z^4} - \dots$$

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη συνάρτηση παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\sin z, (e^{iz} - 1)$ έχουν το ίδιο σύνολο ριζών που είναι τα ακέραια πολλαπλάσια του π και είναι όλες απλές. Η διαδικασία όμως θα διευκολυνθεί αν κάνουμε την αντικατάσταση

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-iz}(1 + e^{iz})(e^{iz} - 1)}{2i}$$

οπότε

$$\frac{\sin^n z}{(e^{iz} - 1)^{k+n}} = \frac{e^{-nz}(1 + e^{iz})^n}{2^n i^n (e^{iz} - 1)^k}.$$

Για $k = 0$ είναι προφανές ότι όλα τα ανώμαλα σημεία είναι απαλείψιμα και η συνάρτηση έχει ακέραια επέκταση.

Για $k = 1$ όλες οι ρίζες $m\pi$ του παρανομαστή είναι τάξης ένα και δεν μηδενίζουν τον αριθμητή επομένως είναι απλοί πόλοι και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο δίνεται από την τιμή

$$\left(\frac{e^{-nz}(1 + e^{iz})^n}{(2^n i^n (e^{iz} - 1))'} \right)_{z=m\pi}$$

που μηδενίζεται για n περιττό και παίρνει την τιμή $\frac{1}{i^{n+1}}$ για n άρτιο.

Σχετικά με την δεύτερη συνάρτηση έχουμε καταρχήν μεμονωμένο ανώμαλο σημεία τα $z_m = \frac{1}{m\pi}, m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Εδώ χρειάζεται προσοχή στην παγίδα

του μηδενός που είναι ανώμαλο αλλά όχι μεμονωμένο (η ακολουθία των προηγούμενων μεμονωμένων συγκλίνει στο μηδέν) και δεν ισχύουν τα γνωστά περί ολοκληρωτικών υπολοίπων. Για τα υπόλοιπα ανώμαλα σημεία η λύση αφήνεται στον αναγνώστη να συνεχίσει ακολουθώντας την διαδικασία της προηγούμενης περίπτωσης.

Σχετικά με την τρίτη συνάρτηση αν θέσουμε $Z = z - \frac{1}{2}$ έχουμε

$$e^{\frac{3}{2z-1}} \cos\left(\frac{2}{2z-1}\right) = e^{\frac{3}{2Z}} \cos \frac{1}{Z} = e^{\frac{3}{2Z}} \left(e^{\frac{i}{Z}} + \frac{e^{-\frac{i}{Z}}}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{3+2i}{2Z}} + \frac{1}{2} e^{\frac{3-2i}{2Z}} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n!} \frac{(3+2i)^n}{2^n Z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n!} \frac{(3-2i)^n}{2^n Z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n!} \frac{((3+2i)^n + (3-2i)^n)}{2^n Z^n}.$$

Από την παραπάνω μορφή είναι προφανές ότι το $\frac{1}{2}$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο και το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι $\frac{3}{2}$.

Σχετικά με την επόμενη περίπτωση αν δεν πάρουμε υπόψη τις ρίζες και πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $z-1$ η συνάρτηση γίνεται $\frac{z^6-1}{z^3-1} = z^3 + 1$ που σημαίνει ότι το όριο της αρχικής συνάρτησης υπάρχει σε κάθε πραγματικό αριθμό οπότε όλα τα ανώμαλα σημεία της είναι απαλείψιμα.

Η τελευταία συνάρτηση ταυτίζεται με την $1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!z^2}$ που προφανώς έχει μοναδικό ανώμαλο σημείο το μηδέν πόλο δευτέρας τάξης και ολοκληρωτικό υπόλοιπο 2.

68. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $I_k = \int_{C(0,r)} \frac{z^k}{e^{\frac{1}{z}} - 1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $r > 2\pi$.

Λύση.

Καταρχήν η ακολουθία των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων $\frac{1}{\pi n}$ συγκλίνει στο μηδέν που σημαίνει ότι το μηδέν παρότι ανώμαλο δεν είναι μεμονωμένο και όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη περίπτωση στο πρόβλημά μας σε αυτή την μορφή δεν εφαρμόζεται το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Μπορούμε όμως να το μετατρέψουμε σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα συμβατό με τό θεώρημα ως εξής.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $z = \frac{1}{w}$, $dz = -\frac{1}{w^2} dw$ η καμπύλη μας $z = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ μετασχηματίζεται στην $\gamma_r(t) = r^{-1}e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ και ισχύει

$$\int_{C(0,r)} \frac{z^k}{e^{\frac{1}{z}} - 1} = - \int_{\gamma_r} \frac{w^{k-2}}{e^w - 1} dw.$$

Προφανώς στο παραπάνω ολοκλήρωμα εφαρμόζεται το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης είναι οι αριθμοί $2n\pi i$, n

ακέραιος, από τα οποία μόνο το μηδέν ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης γ_r ($\frac{1}{r} < 2\pi$) οπότε

$$I_k = -n(\gamma_r, 0)2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{w^{k-2}}{e^w - 1}, 0\right).$$

Υπερνικώντας την δύναμη της αδράνειας θέτουμε $n(\gamma_r, 0) = -1$ (αποδεικνύεται).

Για $k > 2$ το μηδέν είναι απαλείψιμο οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο μηδενίζεται. Για $k \leq 2$ το μηδέν είναι πόλος τάξης $k+1$ οπότε

$$\operatorname{Res}\left(\frac{w^{k-2}}{e^w - 1}, 0\right) = \frac{1}{k!} \left(\frac{w}{e^w - 1}\right)_{w=0}^{(k-1)}.$$

Η συνάρτηση $\frac{w}{e^w - 1}$ επεκτείνεται αναλυτικά στο μηδέν στην $\frac{1}{q}$ όπου

$$q(z) = 1 + \frac{1}{2!}w + \frac{1}{3!}w^2 + \frac{1}{4!}w^3 + \dots$$

οπότε

$$q(0) = 1, \quad \frac{q'(0)}{1!} = \frac{1}{2!} \quad \text{ή} \quad q'(0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{q''(0)}{2!} = \frac{1}{3!} \quad \text{ή} \quad q''(0) = \frac{1}{3}.$$

Τελικά

$$\operatorname{Res}\left(\frac{w^{k-2}}{e^w - 1}, 0\right) = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{q}\right)^{(k-1)}(0).$$

Οι υπόλοιποι απλοί υπολογισμοί αφήνονται στον αναγνώστη.

69. Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $p(z) = z^{20} - 3z^{19} - 60z + 1$ έχει είκοσι ρίζες στον δίσκο $D(0, 5)$, δεκαεννέα στον $D(0, 2)$ μία στον $D(0, 1)$ και καμία στον $D(0, \frac{1}{61})$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους δείκτες στροφής $n(p(C(0, r)), 0)$ και τα ολοκληρώματα $\int_{C(0, 5)} \frac{z^k p'(z)}{p(z)} dz$, $k = 1, 2$.

Λύση.

Αν $g_1(z) = z^{20}$ και $|z| = 5$ έχουμε

$$|p(z) - g_1(z)| = |-3z^{19} - 60z + 1| \leq 3|z|^{19} + 60|z| + 1 = 3 \cdot 5^{19} + 60 \cdot 5 + 1 < 5^{20} = |g_1(z)|.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rouché στο δίσκο από το οποίο προκύπτει ότι οι συναρτήσεις p, g_1 έχουν το ίδιο πλήθος ριζών επάνω σε αυτόν δηλαδή 20 ρίζες.

Για $g_2(z) = 3z^{19}$ και $|z| = 2$ έχουμε

$$|p(z) - g_2(z)| = |z^{20} - 60z + 1| \leq 2^{20} + 60 \cdot 2 + 1 < 3 \cdot 2^{19} = |g_2(z)|$$

οπότε θα έχουμε 19 ρίζες στον δίσκο $D(0, 2)$.

Ομοίως για $g_3(z) = -60z$, $|z| = 1$ έχουμε $|p(z) - g_3(z)| < |g_3(z)|$
και για $g_4(z) = 1$, $|z| = \frac{1}{61}$ έχουμε

$$|p(z) - g_4(z)| < \frac{1}{61^{20}} + \frac{3}{61^{20}} + \frac{60}{61} < 1 = |g_3(z)|.$$

Από την αρχή του ορίσματος γνωρίζουμε ότι ο αριθμός

$$n(p(C(0, r)), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, r)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

ταυτίζεται με το πλήθος των ριζών της p στο δίσκο $D(0, r)$ οπότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα έχουμε τους αντίστοιχους δείκτες στροφής.

Το επόμενο ερώτημα θα το λύσουμε γενικότερα για οποιοδήποτε πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots$ και καμπύλη $C(0, r)$ που περιλαμβάνει στο εσωτερικό της όλες τις ρίζες του.

Εφαρμόζοντας την γενικευμένη αρχή του ορίσματος έχουμε

$$\int_{C(0, r)} z^k \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i \sum \rho_i^k n(C(0, r), \rho_i) = \sum \rho_i^k.$$

Είναι γνωστό ότι στο πολυώνυμο ισχύουν

$$a_{n-1} = -a_n \sum \rho_i \text{ και } a_{n-2} = -a_n \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j$$

οπότε για $k = 1$ η τιμή του ολοκληρώματος είναι $-2\pi i \frac{a_{n-1}}{a_n}$ και για $k = 2$ είναι

$$2\pi i \sum \rho_i^2 = 2\pi i \left(\left(\sum \rho_i \right)^2 - 2 \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j \right) = 2\pi i \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} - \frac{2a_{n-2}}{a_n} \right).$$

Στην ειδική περίπτωση του αρχικού προβλήματος οι τιμές είναι $-2\pi \frac{19}{20}$ και 0 αντίστοιχα.

70. Αν $f(z) = \frac{z^2(z-2)^{32}(z+i)^{20}}{(1+z+z^2+z^3+z^4)^{20}}$ να υπολογιστούν

1. Το $n(f(\gamma), 0)$ υπεράνω καμπύλης που το ίχνος της περιέχεται στο δίσκο $D(0, 3)$, περιέχει στο εσωτερικό τον κλειστό δίσκο $D(0, \frac{3}{2}]$ και ισχύουν $n(\gamma, -1) = -5$, $n(\gamma, 2) = -6$

2. Το $n(f(C(0, r)), 0)$ σε όλες της περιπτώσεις που έχει νόημα.

Λύση. Καταρχήν η συνάρτηση $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ έχει τέσσερες απλές ρίζες ρ_i που όλες έχουν μέτρο ένα (βρείτε της) και καμία δεν μηδενίζει τον αριθμητή οπότε θα αποτελούν πόλους τάξης 20 στην αρχική συνάρτηση.

Επίσης τα σημεία $0, 2, -i$ αποτελούν ρίζες τάξης $2, 32, 20$ αντίστοιχα οπότε με βάση την αρχή του ορίσματος έχουμε

$$n(f(\gamma), 0) = n(\gamma, 0) \cdot 2 + n(\gamma, 2) \cdot 32 + n(\gamma, -i) \cdot 20 - \sum 20n(\gamma, \rho_i).$$

Επειδή τα σημεία $-i, 0, \rho_i$ ανήκουν στο $D(0, \frac{3}{2}) \subseteq \mathbb{C} - \gamma^*$ θα ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - \gamma^*$ και επομένως θα έχουν τον ίδιο δείκτη στροφής δηλαδή -5 . Τελικά $n(f(\gamma), 0) = (-5) \cdot 2 + 32 \cdot (-6) + (-5) \cdot 20 - 4 \cdot 20(-5) = 98$

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα .

Για $r < 1$ μόνο το μηδέν βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης $C(0, r)$ και έχει δείκτη στροφής ένα οπότε $n(f(C(0, r)), 0) = 2$.

Για $1 < r < 2$ έχουμε $n(f(C(0, r)), 0) = 2 + 20 - 4 \cdot 20 = -58$.

Για $r > 2$, $n(f(C(0, r)), 0) = 2 + 20 + 32 - 4 \cdot 20 = -26$.

71. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda}{(x^4+1)} dx$ με λ μη ακέραιο στο διάστημα $(-1, 3)$.

Λύση. Επειδή $\frac{|z|^{\lambda+1}}{|z^4+1|} \rightarrow 0$ όταν $z \rightarrow 0, +\infty$ και ο παρανομαστής δεν έχει θετική ρίζα μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 4.8.9. Επειδή η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^\lambda}{(z^4+1)}$ έχει τέσσερες απλούς πόλους p_1, p_2, p_3, p_4 σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση ισχύει

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} x^\lambda f(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\lambda}}{\sin \pi\lambda} \sum_n \text{Res}(z_L^\lambda f(z), p_n) = \\ &= -e^{-i\pi\lambda} \sum_n \frac{(p_n)_L^\lambda}{4p_n^3} = \sum_n \frac{|p_n|^\lambda}{4p_n^3} e^{i \text{Arg}_L p_n} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε (προσέχοντας ιδιαίτερα στην αναγωγή του ορίσματος στο διάστημα $(0, 2\pi)$),

$$p_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \text{Arg}_L p_1 = \frac{\pi}{4}, p_2 = e^{\frac{i3\pi}{4}}, \text{Arg}_L p_2 = \frac{3\pi}{4},$$

$$p_3 = e^{\frac{i5\pi}{4}}, \text{Arg}_L p_3 = \frac{5\pi}{4}, p_4 = e^{\frac{i7\pi}{4}}, \text{Arg}_L p_4 = \frac{7\pi}{4},$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4\sin\lambda\pi} \left(\frac{e^{\frac{-3\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{e^{\frac{-\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{e^{\frac{53\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{5\pi i}{4}}} + \frac{e^{\frac{3\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{7\pi i}{4}}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\sin\lambda\pi} \left(\left(\frac{e^{\frac{-3\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{e^{\frac{-\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right) - \frac{1}{\sin\lambda\pi} \left(\frac{e^{\frac{-3\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{e^{\frac{-\pi i\lambda}{4}}}{e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\sin\lambda\pi} \left(\cos\left(\frac{3\pi\lambda + \pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi\lambda + 3\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$