

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι

24-1-19

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (t - \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t + \sin t)$$

είναι ίσες.

[12]

2. Έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου, η εικόνα της οποίας βρίσκεται σε μια σφαίρα ακτίνας R , δηλαδή ισχύει $\|\gamma(s)\|^2 = R^2$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα $\kappa(s)$ της γ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\kappa(s) \geq \frac{1}{R}.$$

[20]

3. Θεωρούμε το σύνολο $M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - y^3 = c\}$. Βρείτε όλες τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ ώστε το M_c να είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$

[10]

4. Έστω $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ και η διαφορίσιμη απεικόνιση $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $X(u, v) = (2u, 2v, 3\sqrt{1 - u^2 - v^2})$.

(α) Αποδείξτε ότι η X είναι 1-1 και ότι $X_u \times X_v \neq 0$, δηλαδή ορίζει μια παραμετρημένη επιφάνεια $M = X(U)$.

[5]

(β) Έστω $p = (0, 0, 3) \in M$ και $Z = (2, -1, 0) \in T_p \mathbb{R}^3$.

(i) Βρείτε μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p M$ και δείξτε ότι το Z είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο p .

[10]

(ii) Βρείτε μια καμπύλη γ στην M , τέτοια ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = Z$.

[10]

(γ) Βρείτε τον πίνακα του τελεστή σχήματος S_p στο σημείο $p = (0, 0, 3) \in M$.

[15]

(δ) Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες, τις κύριες διευθύνσεις, την καμπυλότητα Gauss $K(p)$ και τη μέση καμπυλότητα $H(p)$ της M στο σημείο $p = (0, 0, 3) \in M$.

[10]

5. Δείξτε ότι σε μια κανονική επιφάνεια δεν μπορεί να υπάρχει ένα σημείο όπου η καμπυλότητα Gauss να έχει τιμή 20 και η μέση καμπυλότητα τιμή 1.

[8]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!