

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (6-2-2018)

Διδάσκοντες: Σ. Κουρούκλης, Ε.Σ. Μακρή

Θέμα 1ο. (1.5 μον.) (α) Αν $E(-X + 2) = E(X + 4)$ και $E[(2X - 1)^2] = 11$, να υπολογισθεί η $Var(-X - 2)$.

(β) Να δειχθεί ότι $P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | B^c)P(B^c)$, για ενδεχόμενα A και B με $0 < P(B) < 1$ (πλήρης απόδειξη).

(γ) Αν σε ένα ράφι βιβλιοθήκης τοποθετηθούν τυχαία 5 βιβλία Μαθηματικών, 3 Βιολογίας, 4 Χημείας και 2 Φυσικής, ποιά είναι η πιθανότητα τα βιβλία των Μαθηματικών να τοποθετηθούν όλα μαζί; Όλα τα βιβλία είναι διακριτά μεταξύ τους.

Θέμα 2ο. (1.5 μον.) (Α) Να ορισθεί η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) και να δειχθεί ότι είναι αύξουσα.

(Β) Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x^2}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X .

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(\ln X > 0 | X^2 < 2)$.

Θέμα 3ο. (2.5 μον.) (Α) Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , να δειχθεί ότι $E(X^k) = \lambda E[(X + 1)^{k-1}]$, $k = 1, 2, \dots$. Αν επιπλέον, $P(X \leq 1) = 4P(X = 2)$ να υπολογισθεί η $E(X^3)$.

(Β) Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή $Beta(\alpha, \beta)$, $\alpha > 2$, $\beta > 3$, με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

να υπολογισθεί η $E(\frac{1}{X^2(1-X)^3})$.

Θέμα 4ο. (2.5 μον.) Α. Να δειχθεί ότι $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, $x \in R$.

Β. Σε ένα εργοστάσιο παράγονται προϊόντα των οποίων η διάρκεια λειτουργίας (σε ώρες) θεωρείται τ.μ. με κανονική κατανομή με μέση τιμή 2000 και τυπική απόκλιση 200. Ένα προϊόν

χαρακτηρίζεται ελαττωματικό αν η διάρκεια λειτουργίας του είναι μικρότερη από 1600 ώρες. Σε αυτήν την περίπτωση το προϊόν αντικαθίσταται δωρεάν. (α) Μεταξύ 25 προϊόντων να βρεθεί η πιθανότητα να αντικατασταθεί δωρεάν το πολύ ένα. (β) Μεταξύ 250 προϊόντων να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των προϊόντων που θα αντικατασταθούν δωρεάν. (Δίνεται ότι αν $Z \sim N(0, 1)$ τότε $P(-1 < Z < 1) \simeq 0.682$, $P(-2 < Z < 2) \simeq 0.954$ και $P(-3 < Z < 3) \simeq 0.997$.)

Θέμα 5ο. (2 μον.) Κάλπη περιέχει 15 λευκές και 5 μαύρες σφαίρες. Από την κάλπη επιλέγονται τυχαία σφαίρες, η μια μετά την άλλη, με επανάθεση.

(α) Μεταξύ 10 επιλεγέντων σφαιρών, ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μια λευκή και τουλάχιστον μια μαύρη σφαίρα;

(β) Μεταξύ 10 επιλεγέντων σφαιρών, να υπολογισθεί ο αναμενόμενος αριθμός της διαφοράς των λευκών σφαιρών από τις μαύρες.

(γ) Σφαίρες επιλέγονται μέχρι να εμφανισθεί για πρώτη φορά λευκή σφαίρα. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι δεν έχει εμφανισθεί μέχρι την 5η επιλογή, ποιά είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί μετά την 10η επιλογή;