ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (13-2-2014)

Διδάσκοντες: Σ. Κουρούκλης, Ε.Σ. Μακρή

Θέμα 1ο. (1.5 μον.) (α) Αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι (ολικά) ανεξάρτητα να δειχθεί ότι τα A_1 και $A_2 \cup A_3$ είναι ανεξάρτητα.

(β) Να δειχθεί ότι $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

(γ) Από το σύνολο των υποσυνόλων του συνόλου $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ επιλέγεται τυχαία ένα υποσύνολο. Έστω X η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των στοιχείων του επιλεγέντος υποσυνόλου. Για την X να βρεθούν η συνάρτηση πιθανότητας, η συνάρτηση κατανομής και η μέση τιμή της.

Θέμα 2ο. (2 μον.) (α) Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ x - 3, & \text{αν } 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X.

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(\mid X - 3 \mid \leq 0.5 \mid X > 2.2)$.

(γ) Να υπολογισθεί η μέση τιμή της τ.μ. $\mid X - 3 \mid$.

Θέμα 3ο. (2 μον.) (α) Αν για μια τ.μ. X ισχύει ότι $E(X) = 5$ και $E(X^2) = 25$ να βρεθεί η κατανομή της.

(β) Αν $X \sim N(\mu, 1)$, $\mu > 0$, να δειχθεί ότι $P(\mid X \mid < \mu) = \Phi(2\mu) - \frac{1}{2}$.

(γ) Αν η τ.μ. X έχει την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α και β, $\alpha, \beta > 0$, να υπολογισθεί η $E[X^2(X-1)]$.

(δ) Αν οι τ.μ. X και Y έχουν γεωμετρική κατανομή με παραμέτρους p και $\frac{q}{1+q}$, $q = 1 - p$, αντίστοιχα, να δειχθεί ότι $E(q^X) = P(Y = 1)$.

Θέμα 4ο. (2 μον.) (α) Αν X και Y είναι δύο τ.μ. τέτοιες ώστε $2X + Y = 1$, $X \sim N(-1, 4)$ να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. Y.

(β) Η αντίσταση ενός οργάνου, υπό θερμοκρασία 15^{o}C-20^{o}C, είναι τ.μ. με κανονική κατανομή με μέση τιμή 10000 Ohms και τυπική απόκλιση 2000 Ohms, ενώ υπό θερμοκρασία 20^{o}C-30^{o}C είναι τ.μ. με κανονική κατανομή με μέση τιμή 9000 Ohms και τυπική απόκλιση 2000 Ohms. Η θερμοκρασία μιας ημέρας στην περιοχή που θα λειτουργήσει το όργανο είναι τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή $U(15, 30)$.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα μια τυχαία ημέρα η αντίσταση του οργάνου να κυμανθεί μεταξύ 8000 και 10000 Ohms;

(β) Με κατάλληλες υποθέσεις, τις οποίες να αναφέρετε, ποια είναι η πιθανότητα για τουλάχιστον τις μισές από τις ημέρες ενός μήνα (30 ημέρες) η αντίσταση να κυμανθεί μεταξύ 8000 και 10000 Ohms;

Δίνεται ότι: $\Phi(0.33) = 0.6293$, $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(0.63) = 0.7357$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.6) = 0.9474$, $\Phi(2) = 0.9773$.

Θέμα 5ο. (2.5 μον.) Μία μηχανή αποτελείται από n μονάδες οι οποίες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος ζωής κάθε μονάδας είναι τ.μ. με εκθετική κατανομή με μέση διάρκεια ζωής μ ώρες. Μόλις παρέλθει χρονικό διάστημα t ωρών η λειτουργία της μηχανής διακόπτεται (εφ' όσον λειτουργεί) και ελέγχεται από έναν τεχνικό ο οποίος αντικαθιστά όσες μονάδες της μηχανής έχουν πάθει βλάβη.

(α) Έστω ότι οι μονάδες της μηχανής είναι αριθμημένες, $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 5$, και ελέγχονται κατ' αυτή τη σειρά. Ποιά είναι η πιθανότητα ο τεχνικός

(i) να αντικαταστήσει δύο μονάδες μεταξύ των πέντε πρώτων,

(ii) η δεύτερη που θα αντικαταστήσει να είναι η πέμπτη μονάδα,

(iii) να αντικαταστήσει μόνο τις δύο πρώτες από τις πέντε πρώτες μονάδες.

(β) Ο τεχνικός αμοίβεται με α Ευρώ για κάθε μονάδα που αντικαθιστά και με β Ευρώ αν δεν βρεθεί καμμία μονάδα εκτός λειτουργίας. Να υπολογισθεί η μέση αμοιβή του τεχνικού.

Θέμα 1.

α. Αρκεί ν.δ.ο. $P(A_1\cap(A_2\cup A_3)) = P(A_1)P(A_2\cup A_3)$ (1)

1ο μέλος της (1) $= P((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)) = P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_2\cap A_3)$

$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

2ο μέλος της (1) $= P(A_1)\{P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)\} = P(A_1)P(A_2)+$

$+P(A_1)P(A_3)-P(A_1)P(A_2\cap A_3) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

β. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$

$\displaystyle\overset{k-1=m}{=} n\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m} = n\,2^{n-1}$, από τη σχέση $\displaystyle 2^{n-1}=(1+1)^{n-1}=\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}$.

γ. Η τ.μ. X είναι διακριτή με (δυνατές/πιθανές) τιμές : $0, 1, \dots, n$

Για $x\in\{0,1,\dots,n\}$, $P(X=x) = P($επιλογή υποσυνόλου x στοιχείων$)$

$= \dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}} = \dfrac{\binom{n}{x}}{2^n}$, γιατί υπάρχουν 2^n το πλήθος υποσύνολα του A και, εξ αυτών, τα $\binom{n}{x}$ περιέχουν (ακριβώς) x στοιχεία.

Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση : $F(y) = P(X\le y)$, $y\in\mathbb{R}$.

Επομένως, $F(y)=0$ για $y<0$, $F(y)=P(X=0)$ για $0\le y<1$, $F(y)=P(X=0)+$ $+P(X=1)$ για $1\le y<2$, ..., $F(y)=P(X=0)+\dots+P(X=k)$ για $k\le y<k+1$, (με $k=0,1,\dots,n-1$) ..., $F(y)=1$ για $y\ge n$.

Η μέση τιμή της X είναι $\displaystyle E(X)=\sum_{x=0}^{n} x\,P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x\,P(X=x) =$

$\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x\,\frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x} = \frac{1}{2^n}\,n\,2^{n-1} = \frac{n}{2}$.

↳ από το (β)

Θέμα 2.

α. $\displaystyle F(x)=P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, $F(x)=0$ για $x<2$,

$\displaystyle F(x)=\int_2^x (3-t)\,dt=\cdots$ για $2\le x<3$, $\displaystyle F(x)=\int_2^3(3-t)\,dt+\int_3^x(t-3)\,dt=\cdots$ για $3\le x\le 4$ και $F(x)=1$ για $x>4$.

β. $\displaystyle P(|X-3|\le 0.5 \mid X>2.2) = \frac{P(|X-3|\le 0.5,\ X>2.2)}{P(X>2.2)} = \frac{P(2.5\le X\le 3.5)}{P(X>2.2)}$

$\displaystyle = \frac{F(3.5)-F(2.5)}{1-F(2.2)} = \cdots$

γ. $\displaystyle E(|X-3|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-3|f(x)\,dx = \int_2^3(3-x)(3-x)\,dx+\int_3^4(x-3)(x-3)\,dx = \frac{2}{3}$.

Θέμα 3.

α. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 25 - 25 = 0$. Άρα η τ.μ. X είναι σταθερά, με πιθανότητα 1, δηλ. $P(X=\alpha)=1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (σταθερά). Τότε όμως $EX = \alpha \cdot 1 = \alpha$, αλλά $EX=5$ οπότε $\alpha=5$. Επομένως η X είναι η σταθερά 5 με πιθανότητα 1.

β. $P(|X|<\mu) = P(-\mu < X < \mu) = P(-2\mu < X-\mu < 0) = P(-2\mu < Z < 0)$
$= \Phi(0) - \Phi(-2\mu) = \frac{1}{2} - (1-\Phi(2\mu)) = \Phi(2\mu) - \frac{1}{2}$ $\quad \hookrightarrow Z = X-\mu \sim N(0,1)$

γ. $E[X^2(X-1)] = E(X^3) - E(X^2)$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha+3-1} e^{-x/\beta} dx =$$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\Gamma(\alpha+3)\beta^{\alpha+3} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x/\beta} dx = \Gamma(m)\beta^m$ και $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$.

Ανάλογα (ή από τον τύπο της διασποράς της X) έχουμε $E(X^2) = \alpha(\alpha+1)\beta^2$.

δ. $Y \sim Geo\left(\frac{q}{1+q}\right) \Rightarrow P(Y=1) = \frac{q}{1+q}$

$X \sim Geo(p) \Rightarrow E(q^X) = \sum_{x=1}^\infty q^x p q^{x-1} = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^\infty q^{2x} = \frac{p}{q}\cdot\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)}$
$= \frac{pq}{p(1+q)} = \frac{q}{1+q} = P(Y=1)$.

Θέμα 4.

α. $Y = 1-2X$, γραμμικός μετασχηματισμός κανονικής τ.μ., άρα $Y \sim N(\nu, \tau^2)$ όπου $\nu = E(Y) = E(1-2X) = 1-2E(X) = 1-2(-1) = 3$ και $\tau^2 = Var(Y) = Var(1-2X) = 4Var(X) = 4\cdot 4 = 16$. Επομένως $Y \sim N(3,16)$.

β. Ορίζουμε X_1 = η αντίσταση σε χιλιάδες ohms υπό θερμοκρασία 15°–20°, $X_1 \sim N(10,4)$
X_2 = η αντίσταση σε χιλιάδες ohms υπό θερμοκρασία 20°–30°, $X_2 \sim N(9,4)$

Η θερμοκρασία, U, μιας ημέρας είναι τ.μ., $U(15,30)$.

β1. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A = η αντίσταση να κυμανθεί μεταξύ 8 και 10 χιλιάδες ohms, B_1 = η θερμοκρασία, U, είναι μεταξύ 15°–20°, B_2 = η θερμοκρασία U, είναι μεταξύ 20°–30°. Από το Θεώρημα ολικής πιθανότητας $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) =$
$= P(8 < X_1 < 10)P(B_1) + P(8 < X_2 < 10)P(B_2)$.

$P(B_1) = \frac{20-15}{30-15} = \frac{1}{3}$, $P(B_2) = \frac{30-20}{30-15} = \frac{2}{3}$ (πιθανότητες ομοιόμορφης κατανομής)

$$P(8<X_1<10) \overset{\text{τυποποίηση}}{=} P\left(\frac{8-10}{2} < \frac{X_1-10}{2} < \frac{10-10}{2}\right) = P(-1<Z<0) = \Phi(0)-\Phi(-1)$$
$$= \frac{1}{2} - (1-\Phi(1)) = \Phi(1) - \frac{1}{2} = 0.8413 - \frac{1}{2} = 0.3413.$$
$$P(8<X_2<10) = P\left(\frac{8-9}{2} < \frac{X_2-9}{2} < \frac{10-9}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2}<Z<\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right)-\Phi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(1-\Phi\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 2\Phi\left(\tfrac{1}{2}\right)-1 = 2*0.6915-1 =$$
$$= 0.383.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $P(A) = 0.3413*\frac{1}{3} + 0.383*\frac{2}{3} = 0.3691$

β2. Ορίζουμε Y = ο αριθμός ημερών ενός μήνα κατά τις οποίες η αντίσταση κυμαίνεται μεταξύ 8000 και 1000 Ohms. Τότε $Y \sim B(n=30, p=0.3691)$ (υπό την υπόθεση ανεξαρτησίας)

$$P(Y \geq 15) = \sum_{k=15}^{30} P(Y=k) = \sum_{k=15}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}.$$

Θέμα 5.

α. Ορίζουμε X = ο χρόνος ζωής μιας μονάδας, $X \sim \mathcal{E}(1/\mu)$, δηλ. η πυκνότητα της X είναι $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$, $x>0$.

Μια μονάδα θα αντικατασταθεί $\iff X<t$, άρα $p = P(\text{αντικατάστασης μιας μονάδας}) = P(X<t) = \int_0^t \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = 1 - e^{-t/\mu}$.

(i) Y = ο αριθμός των μονάδων που θα αντικαταστήσει ο τεχνικός, μεταξύ των 5 πρώτων. $Y \sim B(n=5, p=1-e^{-t/\mu})$ ("επιτυχία" = αντικατάσταση)

$$P(Y=2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3.$$

(ii) P(η $2^η$ που θα αντικαταστήσει να είναι η $5^η$ μονάδα) $= P$(η $2^η$ "επιτυχία" να συμβεί στην $5^η$ "δοκιμή") $= P(W=2) = \binom{4}{1} p^2(1-p)^3 = 4p^2(1-p)^3$.

↳ Pascal, $W \sim \text{Pascal}(r=2, p)$

(iii) P(μόνον οι 2 πρώτες να αντικατασταθούν) $= P(E\cap E\cap A\cap A\cap A) =$
$= P(E)P(E)P(A)P(A)P(A) = p^2(1-p)^3$

↳ ανεξαρτησία

↳ E = "επιτυχία" = αντικατάσταση, A = "αποτυχία" = μη αντικατάσταση

β. Ορίζουμε Z = ο αριθμός των μονάδων που αντικαθιστά μεταξύ των n. Έχουμε $Z \sim B(n, p)$ (Διωνυμική) και $E(Z)=np$. Η αμοιβή του τεχνικού είναι $V=\beta$, αν $Z=0$ ή $V=\alpha Z$ αν $Z=1,\dots,n$.

Επομένως η μέση αμοιβή είναι $E(V) = \beta\cdot P(Z=0) + \alpha\cdot 1 P(Z=1) + \dots + \alpha\cdot n\cdot P(Z=n) = \beta(1-p)^n + \alpha\cdot 0\cdot P(Z=0) + \alpha\cdot 1 P(Z=1) + \dots + \alpha\cdot n P(Z=n)$
$= \beta(1-p)^n + \alpha\{0\cdot P(Z=0) + 1\cdot P(Z=1) + \dots + nP(Z=n)\} =$
$\beta(1-p)^n + \alpha E(Z) = \beta(1-p)^n + n\alpha p.$