ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου 2014-2015

Θέμα 1 (3 μονάδες). Δίνεται η παραμετρικοποιημένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\ \sin t,\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

(α) Βρείτε τύπο για την καμπυλότητα της γ.
(β) Βρείτε τύπο για τη στρέψη της γ.
(γ) Δείξτε ότι η γεωμετρική εικόνα της γ είναι κύκλος ακτίνας 1 (στον $\mathbb{R}^3$).

Λύση.
(α) Έχουμε

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ \cos t,\ -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right),$$

επομένως $||\gamma'(t)|| = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{2} + \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2}} = 1$, δηλαδή η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Αφού

$$\gamma''(t) = \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\ -\sin t,\ -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right),$$

συμπεραίνουμε ότι η καμπυλότητα κ της γ ισούται με $\kappa(t) = ||\gamma''(t)|| = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{2} + \sin^2 t + \frac{\cos^2 t}{2}} = 1$, για κάθε t.
(β) Από τη λύση του (α) έπεται ότι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα T της γ ισούται με το γ' και επομένως το πρώτο κάθετο διάνυσμα N της γ δίνεται από $N(t) = \frac{T'(t)}{\kappa(t)} = \gamma''(t)$, άρα

$$N'(t) = \gamma'''(t) = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ -\cos t,\ \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right) = -T(t).$$

Από την άλλη, αν B ειναι το δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της γ και τ είναι η στρέψη της γ, οι τύποι Frenet-Serret δίνουν $N'(t) = -T(t) + \tau(t)B(t)$. Συνεπώς, $\tau(t) = 0$, για κάθε t.
(γ) Αφού η καμπυλότητα και η στρέψη της γ ισούνται με την καμπυλότητα και τη στρέψη (αντίστοιχα) του μοναδιαιου κύκλου C στο xy-επίπεδο με κέντρο την αρχή των αξόνων, έπεται, από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Καμπύλων, ότι η γ προέρχεται από τον C μέσω μιας ευθείας ισομετρίας του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή η γ είναι κύκλος ακτίνας 1 στο χώρο. Ακριβέστερα, η γ είναι εικόνα του C μέσω της ισομετρίας του $\mathbb{R}^3$ που περιγράφεται από τον ορθογώνιο πίνακα

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Θέμα 2 (1 μονάδα). Δείξτε ότι το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^3 - y^2 z + z^3 = 1\}$$

είναι κανονική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Έστω $f(x,y,z) = x^3 - y^2 z + z^3 - 1$. Από το θεώρημα στάθμης, αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla f \neq 0$ παντού στο S. Έστω $P = (a,b,c) \in S$. Αν $\nabla f(P) = 0$, τότε $3a^2 = 0$, $-2bc = 0$ και $-b^2 + 3c^2 = 0$. Η πρώτη ισότητα δίνει $a = 0$. Η δεύτερη ισότητα δίνει $b = 0$ ή $c = 0$. Επομένως, από την τρίτη ισότητα, έχουμε ότι, σε κάθε περίπτωση, $b = c = 0$. Επομένως, $P = (0,0,0)$, άτοπο, διότι το $(0,0,0)$ δεν ανήκει στο S.

Θέμα 3 (2 μονάδες). Θεωρούμε ένα τμήμα της λεγόμενης ομπρέλας του Whitney, δηλαδή θεωρούμε την επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$ με παραμετρικοποίηση

$$\sigma(x,y) = (xy,\ x,\ y^2),$$

όπου $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, με $x > 0$ και $y > 0$.
(α) Υπολογίστε την πρώτη και τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της S.
(β) Δείξτε ότι όλα τα σημεία της S είναι υπερβολικά.

Λύση.
(α) Έχουμε

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = (y,1,0), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = (x,0,2y), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = (0,0,0), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x\, \partial y} = (1,0,0), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial^2 y} = (0,0,2),$$

$$N = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}}{||\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}||} = \left(\frac{2y}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}},\ \frac{-2y^2}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}},\ \frac{-x}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}} \right).$$

Επομένως,

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 1 + y^2, \quad F = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} = xy, \quad G = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} = x^2 + 4y^2,$$

$$e = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \cdot N = 0, \quad f = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \cdot N = \frac{2y}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}}, \quad g = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \cdot N = \frac{-2x}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}}.$$

Επομένως, η πρώτη θεμελιώδης μορφή της S δίνεται από

$$(1+y^2)\ dx^2 + 2xy\ dx\ dy + (x^2+4y^2)\ dy^2$$

και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S δίνεται από

$$\frac{4y}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}}\ dx\ dy - \frac{2x}{\sqrt{4y^2+4y^4+x^2}}\ dy^2.$$

(β) Έχουμε

$$EG - F^2 = 4y^2 + 4y^4 + x^2, \qquad eg - f^2 = -\frac{4y^2}{4y^2+4y^4+x^2}.$$

Επομένως, η καμπυλότητα Gauss της S δίνεται από

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{4y^2}{(4y^2+4y^4+x^2)^2} < 0.$$

Αφού η καπυλότητα Gauss είναι το γινόμενο των δύο κύριων καμπυλοτήτων, έπεται ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι παντού μη μηδενικές και ετερόσημες, άρα κάθε σημείο της S είναι υπερβολικό.

Θέμα 4 (2 μονάδες). Έστω α μια κανονική C^∞ καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ παραμετρικοποιημένη ως προς μήκος τόξου s. Υποθέτουμε ότι η καμπυλότητα κ της α είναι παντού μη μηδενική.
(α) Δείξτε ότι η καμπύλη β που ορίζεται από τον τύπο

$$\beta = \frac{d\alpha}{ds}$$

είναι κανονική.
(β) Δείξτε ότι η καμπυλότητα της β δίνεται από τον τύπο

$$\sqrt{1+\frac{\tau^2}{\kappa^2}},$$

όπου τ η στρέψη της α.

Λύση.
(α) Πρέπει να δείξουμε ότι $\beta'(s) \neq 0$, για κάθε s. Όμως $\beta'(s) = \alpha''(s)$. Αφού η α είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, έχουμε ότι $||\alpha''(s)|| = \kappa(s) \neq 0$, για κάθε s. Επομένως, $\beta'(s) = \alpha''(s) \neq 0$, για κάθε s.
(β) Έστω T, N, B τα ορθομοναδιαία διανύσματα του τριέδρου Frenet της καμπύλης α. Έχουμε $\beta'(s) = \alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$. Άρα από τους τύπους Frenet-Serret έπεται ότι

$$\beta''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\beta''(s) \times \beta'(s) &= \kappa'(s)\kappa(s)(N(s) \times N(s)) - \kappa^3(s)(T(s) \times N(s)) + \kappa^2(s)\tau(s)(B(s) \times N(s))\\ &= -\kappa^3(s)B(s) - \kappa^2(s)\tau(s)T(s).\end{aligned}$$

Άρα

$$||\beta''(s) \times \beta'(s)||^2 = (\kappa^3(s)B(s) + \kappa^2(s)\tau(s)T(s)) \cdot (\kappa^3(s)B(s) + \kappa^2(s)\tau(s)T(s))$$
$$= \kappa^6(B(s) \cdot B(s)) + 2\kappa^5(s)\tau(s)(B(s) \cdot T(s)) + \kappa^4(s)\tau^2(s)(T(s) \cdot T(s)) = \kappa^6(s) + \kappa^4(s)\tau^2(s).$$

Αφού η καμπυλότητα κ_β της β δίνεται από τον τύπο

$$\kappa_\beta(s) = \frac{||\beta''(s) \times \beta'(s)||}{||\beta'(s)||^3},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\sqrt{\kappa^6(s) + \kappa^4(s)\tau^2(s)}}{\kappa^3(s)} = \sqrt{1+\frac{\tau^2(s)}{\kappa^2(s)}},$$

για κάθε s.

Θέμα 5 (2 μονάδες). Έστω S κανονική C^∞ επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ παραμετρικοποιημένη από μια λεία, 1-1 και επί απεικόνιση $\sigma : U \to S$, όπου

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ -\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}, \ -1 < v < 1\}.$$

Δίνεται ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή της S ισούται με $du^2 + \cos^2 u \; dv^2$.
(α) Υπολογίστε το εμβαδό της S.
(β) Έστω K η καμπυλότητα Gauss της S. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial K}{\partial v} = 0.$$

Λύση.
(α) Οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της S είναι $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$. Άρα $\sqrt{EG - F^2} = |\cos u| = \cos u$ (στο χωρίο U), επομένως το εμβαδό της S ισούται με

$$\iint\limits_U \cos u \; du \; dv = \int_{-1}^{1} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos u \; du \; dv = \int_{-1}^{1} \left(\sin u \Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \right) dv = \int_{-1}^{1} \sqrt{2} \; dv = 2\sqrt{2}.$$

(β) Από το Theorema Egregium, ξέρουμε ότι η K εξαρτάται μόνο από τα E, F και G, δηλαδή η K είναι συνάρτηση του u. Επομένως, $\frac{\partial K}{\partial v} = 0$.