

# Θεωρία Πιθανοτήτων Ι - Τμήμα Β - Ασκήσεις ΙΙΙΙ - Νοέμβριος 2017

1. Να δοθεί ένα παράδειγμα χώρου πιθανότητας  $(S, \mathcal{A}, P)$  με  $P(A) = 1$  και  $A \neq S$ .
2. α. Αν  $P(A) = 1$  και  $P(B) = 1$ , να δειχθεί ότι  $P(A \cap B) = 1$ .  
β. (Γενίκευση) Αν  $P(A_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n$ , να δειχθεί ότι  $P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = 1$ .
3. Αν τα ενδεχόμενα  $A, B, \Gamma$  είναι ανεξάρτητα, να δειχθούν τα εξής.
  - α. Τα ενδεχόμενα  $A^c$  και  $B^c \cup \Gamma^c$  είναι ανεξάρτητα.
  - β. Τα ενδεχόμενα  $A^c, B^c, \Gamma^c$  είναι ανεξάρτητα.
4. Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός (τέλειου) νομίσματος 3 φορές και τα ενδεχόμενα  $A = \{\Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, K\Gamma K\}$ ,  $B = \{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma K\}$ ,  $\Gamma = \{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma K\}$ . Να δειχθεί ότι τα  $A, B, \Gamma$  δεν είναι ανεξάρτητα ανά δύο και όμως ισχύει  $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$ .
5. Κάθε μία από δύο κάλπες περιέχει  $L$  λευκές μπάλες και  $M$  μαύρες μπάλες. Μία μπάλα επιλέγεται τυχαία από τη μία κάλπη και τοποθετείται στην άλλη χωρίς να παρατηρηθεί το χρώμα της. Στη συνέχεια, από την κάλπη στην οποία τοποθετήθηκε αυτή η μπάλα επιλέγεται τυχαία μία μπάλα και διαπιστώνεται ότι είναι λευκή. Να υπολογιστεί η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να ήταν λευκή.
6. Δύο παίκτες  $A, B$  ρίχνουν ο ένας μετά τον άλλο ένα (τέλειο) ζεύγος ζαριών και νικητής αναδεικνύεται όποιος φέρει άθροισμα 4 για πρώτη φορά, σε κάποια ρίψη. Πρώτος ρίχνει το ζεύγος των ζαριών ο  $A$ . Ποια είναι η πιθανότητα να αναδειχθεί νικητής ο  $B$  στην 10η ρίψη? Ποια είναι η πιθανότητα να αναδειχθεί νικητής ο  $B$ ?
7. Από ένα πίνακα ελέγχου δίνονται εντολές να κλείσουν δύο διακόπτες στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  ώστε να περάσει ηλεκτρικό ρεύμα από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ . Όμως λόγω βλάβης, ο διακόπτης στο  $\Gamma$  κλείνει μόνον σε 70% των περιπτώσεων και ο διακόπτης στο  $\Delta$  δεν κλείνει σε 20% των περιπτώσεων. Οι δύο διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα. Σε μία εντολή να κλείσουν οι διακόπτες, παρατηρήθηκε ότι το ρεύμα δεν έφτασε στο  $B$ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα να μην έκλεισε ο διακόπτης στο  $\Delta$ .

A \_\_\_\_\_ Γ \_\_\_\_\_ Δ \_\_\_\_\_ B

8. Σύστημα αντιαεροπορικής άμυνας αποτελείται από  $n$  ραντάρ, τα οποία λειτουργούν ανεξάρτητα και καλύπτουν τον ίδιο εναέριο χώρο. Οι πιθανότητες εντοπισμού αεροπλάνου από कोई ένα ραντάρ είναι  $p_1, p_2, \dots, p_n$  αντίστοιχα.
  - α. Αεροπλάνο εισέρχεται στον εναέριο χώρο δράσης των ραντάρ. Να βρεθεί η πιθανότητα να εντοπισθεί από τουλάχιστον ένα ραντάρ.
  - β. Δύο αεροπλάνο εισέρχονται στον εναέριο χώρο δράσης των ραντάρ. Να βρεθεί η πιθανότητα να εντοπισθεί τουλάχιστον ένα από αυτά. (Θεωρήστε ότι ο εντοπισμός του ενός αεροπλάνου είναι ενδεχόμενο ανεξάρτητο του εντοπισμού του άλλου.)

9. Σύστημα αποτελείται από  $n$  υποσυστήματα που λειτουργούν ανεξάρτητα με πιθανότητες λειτουργίας  $P_1, P_2, \dots, P_n$  αντίστοιχα. Το σύστημα λειτουργεί αν και μόνον αν λειτουργούν όλα τα υποσυστήματα του (σειριακό σύστημα). Να βρεθεί η πιθανότητα μη λειτουργίας του συστήματος.

10. Κάλη περιέχει 2 λευκές και 3 μαύρες βόλτες. Δύο παίκτες  $A$  και  $B$  επιλέχουν <sup>ο ένας μετά τον άλλο,</sup> μία βόλτα από την κάλη, με επαναποδέτηση, μέχρι να επιλεγεί λευκή βόλτα. Όποιος από τους παίκτες επιλέξει για πρώτη φορά λευκή βόλτα, κερδίζει. Πρώτα επιλέγει ο  $A$ , μετά ο  $B$  κ.ο.κ. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να κερδίσει ο  $A$ . Να απαντηθεί το ίδιο ερώτημα, αλλά χωρίς επαναποδέτηση των βολών.

11. Δύο παίκτες,  $A$  και  $B$ , παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Ρίχνουν επανειλημμένα ένα (αμερόμητο) νόμισμα. Αν σε μία ρίψη εμφανιστεί η όψη " $K$ ", κερδίζει ο  $A$   $1 \in$  από τον  $B$ , ενώ αν εμφανιστεί η όψη " $\Gamma$ " κερδίζει ο  $B$   $1 \in$  από τον  $A$ . Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποιος από τους δύο παίκτες χρεωκοπήσει (δηλ. έχει  $0 \in$ ), οπότε νικητής αναδεικνύεται ο άλλος. Στην αρχή του παιχνιδιού καθένας διαθέτει  $6 \in$ .  
Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

- να τελειώσει το παιχνίδι στην  $6^{\text{η}}$  ρίψη με νικητή τον  $A$ .
- να τελειώσει το παιχνίδι στην  $6^{\text{η}}$  ρίψη.
- να τελειώσει το παιχνίδι στην  $8^{\text{η}}$  ρίψη, με νικητή τον  $A$ .