

Θεωρία Πιθανοτήτων I - Τμήμα Β - Αδειύσεις 1114 - Οκτώβριος 2017

1. Θεωρούμε τα εξής δύο παιχνίδια: 1) Από κάλπη που περιέχει L λευκές και M μαύρες μπάλες επιλέγεται τυχαία μια μπάλα. Κερδίζεις αν η μπάλα αυτή είναι λευκή. 2) Από κάλπη που περιέχει L λευκές και M μαύρες μπάλες επιλέγεται τυχαία μια μπάλα, διαπιστώνεται το χρώμα της και επανατοποθετείται στην κάλπη μαζί με άλλες K μπάλες του ίδιου χρώματος. Κοτόπιν, από την κάλπη επιλέγεται τυχαία μια μπάλα και κερδίζεις αν αυτή είναι λευκή. Ποιο από τα δύο παιχνίδια θα έπαιζες; (το κέρδος είναι το ίδιο ^{και} στα δύο)
(Υπόδειξη: για το δεύτερο, θεωρήμα ομικής πιθανότητας)

2. Κάθε μια από 3 κάλπες περιέχει 10 λευκές και 10 μαύρες μπάλες. Επιλέγεται 1 μπάλα από την πρώτη κάλπη και τοποθετείται μαζί με άλλες 9 του ίδιου χρώματος με αυτήν στην δεύτερη κάλπη. Στη συνέχεια επιλέγεται 1 μπάλα από την δεύτερη κάλπη και τοποθετείται μαζί με άλλες 9 του ίδιου χρώματος με αυτήν στην τρίτη κάλπη. Τέλος επιλέγεται 1 μπάλα από την τρίτη κάλπη. Να υπολογιστεί η πιθανότητα και οι 3 μπάλες που επιλέγονται να είναι του ίδιου χρώματος. (Υπόδειξη: πολλαπλασιαστικός κανόνας, αλλά και τύπος του Laplace)

3. Το 1% πληθυσμού πάσχει από μια ασθένεια. Ένα διαγνωστικό τεστ κάνει ορθή διάγνωση σε 99% των περιπτώσεων. Δηλαδή, αν το άτομο όντως πάσχει, τότε το τεστ είναι θετικό με πιθανότητα 0.99 και επίσης αν το άτομο όντως δεν πάσχει, τότε το τεστ είναι αρνητικό με πιθανότητα 0.99. Ένα άτομο υποβάλλεται στο τεστ το οποίο βγαίνει αρνητικό. Ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει από την ασθένεια; (Υπόδειξη: τύπος του Bayes)