Θεωρία Πιθανοτήτων Ι – Τμήμα Α – Ασκήσεις ΙΙ – Οκτώβριος 2016

1. Αν $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$ και $P(A\cap B)=0.1$, να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
   α. Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα εκ των Α και Β.
   β. Να πραγματοποιηθεί μόνον το Α
   γ. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα εκ των Α και Β.

2. Αν $P(A)=0.4$ και $P(B)=0.7$, να δειχθεί ότι
   α. Τα Α και Β δεν είναι ξένα.
   β. $0.1\le P(A\cap B)\le 0.4$.

3. Αν $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, $P(A-B)=0.4$ και $B\subset\Gamma$, να υπολογιστεί $P(A\cup B^c\cup\Gamma^c)$.

4. Να δειχθούν οι σχέσεις: α. $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)\le \min\{P(A_1),\dots,P(A_n)\}$
   β. $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)\le \sqrt[n]{P(A_1)\cdots P(A_n)}$. γ. $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

5. α. Να δειχθεί ότι $P(A^c\cap B\cap\Gamma)+P(A\cap B^c\cap\Gamma)+P(A\cap B\cap\Gamma^c)\le P(A^c\cup B^c\cup\Gamma^c)$.
   β. Να δειχθεί ότι $P(A\cap B^c\cap\Gamma^c)+P(A^c\cap B\cap\Gamma^c)+P(A^c\cap B^c\cap\Gamma)\le P(A\cup B\cup\Gamma)$.

6. Σε καθημερινά δρομολόγια της ίδιας διαδρομής, οδηγός περνά από δύο σημεία τα οποία έχουν φανάρια, έστω Α και Β. Έχει παρατηρήσει ότι σε (περίπου) 40% των δρομολογίων σταματά στο φανάρι Α (γιατί είναι κόκκινο), σε (περίπου) 30% των δρομολογίων σταματά στο φανάρι Β, ενώ σε (περίπου) 50% των δρομολογίων δεν σταματά σε κανένα από τα δύο φανάρια. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα να υπολογιστούν (πιο σωστά, να εκτιμηθούν) οι πιθανότητες: α. Στο αυριανό δρομολόγιο, να σταματήσει σε τουλάχιστον ένα φανάρι
   β. Στο αυριανό δρομολόγιο, να σταματήσει σε ακριβώς ένα εκ των Α και Β

7. Να δειχθεί ότι αν ένα τυχαίο πείραμα έχει άπειρο αλλά αριθμήσιμο πλήθος (στοιχειωδών) δυνατών αποτελεσμάτων, τότε αυτά δεν είναι ισοπίθαν

(Διαφορετική, αυστηρή διατύπωση: Αν $(S, \mathcal{A}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας ~~με~~ όπου $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του S, τότε δεν ισχύει η σχέση $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \ldots$)

8. Έστω $S \neq \phi$, $\phi \neq A \subset S$ γνήσιο υποσύνολο, $\mathcal{A} = \{\phi, A, A^c, S\}$ και η συνάρτηση $P : \mathcal{A} \rightarrow R$, όπου $P(\phi) = P(A^c) = 0$ και $P(A) = P(S) = 1$. Να δειχθεί ότι η τριάδα $(S, \mathcal{A}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας.

9. Έστω $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του S και η συνάρτηση $P : \mathcal{A} \rightarrow R$ με τύπο $P(A) = 1$ αν το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του S και $P(A) = 0$ αν το A είναι μη πεπερασμένο υποσύνολο του S. Να δειχθεί ότι η τριάδα $(S, \mathcal{A}, P)$ δεν είναι χώρος πιθανότητας.

10. Στο παιχνίδι του πόκερ πέντε κάρτες ("χαρτιά") επιλέγονται (μοιράζονται στον παίκτη) από μια τράπουλα 52 καρτών. Η επιλογή γίνεται χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α. Ενός ζεύγους (δηλ. 5 κάρτες της μορφής $aabcd$)

β. Δύο ζευγών (δηλ. 5 κάρτες της μορφής $aabbc$)

γ. Τριών ομοίων καρτών (δηλ. 5 κάρτες της μορφής $aaabc$)

δ. Τεσσάρων ομοίων καρτών ("καρέ") (δηλ. 5 κάρτες της μορφής $aaaab$)

ε. Χρώματος (δηλ. 5 "σπαθιά" ή 5 "καρώ" ή 5 "κούπες" ή 5 "μπαστούνια")

(Σημείωση: Μία τράπουλα 52 καρτών περιέχει 13 κάρτες διαφορετικών συμβόλων – 1, 2, ..., 10, J, Q, K – και κάθε σύμβολο εμφανίζεται σε 4 παραλλαγές – σπαθί, καρώ, κούπα, μπαστούνι.)