# Πολλαπλά Καθολικές Συναρτήσεις

**Περίληψη**

Η ερευνητική μας δραστηριότητα αφορά φαινόμενα καθολικότητας. Αναφερόμαστε σε φαινόμενα όπου μια συλλογή αντικειμένων που σχετίζεται με ένα στοιχείο πραγματοποιεί προσεγγίσεις. Συγκεκριμένα, αν έχουμε μια ακολουθία τελεστών $(T_n)_n$ $(n \in \mathbb{N})$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων $X$ και $Y$, ένα στοιχείο $x \in X$ λέγεται καθολικό αν κάθε στοιχείο του $Y$ μπορεί να προσεγγιστεί από κάποια υπακολουθία της $(T_n x)_n$. Ας θεωρήσουμε $X := H(\Omega)$ τον χώρο των ολόμορφων συναρτήσεων σε απλά συνεκτικό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{C}$ (με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή). Τότε μελετάμε κλάσεις ολόμορφων συναρτήσεων για τις οποίες τα ζεύγη $(S_n(f), S_{\lambda_n}(f))_n$ πραγματοποιούν προσεγγίσεις (όπου $S_n(f)$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων του αναπτύγματος Taylor της $f$, γύρω από κάποιο $\zeta \in \Omega$). Οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν καθολικά στοιχεία για συγκεκριμένη ακολουθία τελεστών.

Έπειτα, δουλεύουμε στον χώρο $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ των πραγματικών, άπειρες φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, εφοδιασμένο με την τοπολογία που ορίζεται από τις ημινόρμες $p_n(f) = \max\limits_{0 \le k \le n} \sup\limits_{x \in [-n,n]} |f^{(k)}(x)|$, για $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ και θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή Taylor (backward) shift με κέντρο το 0 που ορίζεται ως εξής: $T_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, με $T_0(f)(x) := \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, $x \neq 0$ και $T_0(f)(0) := f'(0)$. Παρουσιάζουμε μια έννοια πολλαπλής καθολικότητας για μια πεπερασμένη συλλογή από υπακολουθίες της τροχιάς του Taylor shift τελεστή. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η κλάση αυτών των καθολικών στοιχείων έχει μια ιδιότητα παρεμβολής: δοσμένης ακολουθίας πραγματικών αριθμών, χωρίς σημείο συσσώρευσης, υπάρχει συνάρτηση σε αυτή τη κλάση, με προκαθορισμένες τιμές στα σημεία της ακολουθίας.