Λύσεις Θεμάτων στη Μαθηματική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

26 Σεπτεμβρίου 2018

Θέμα 1: (α) Αποδείξτε ότι το σύνολο των κλειστών διαστημάτων των πραγματικών αριθμών αποτελεί μετρικό χώρο ως προς τη μετρική ρ που δίνεται ως εξής:

$$\rho([a,b],[c,d]) = \max\{|a-c|, |b-d|\}$$

(β) Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}^3$ ως προς τη συνηθισμένη του μετρική. Βρείτε τα εσωτερικά σημεία του συνόλου $(0,1] \times [0,1) \times (0,1)$ και την κλειστή θήκη του συνόλου $[0,1] \times (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times (\mathbb{I} \cap (0,1))$, όπου $\mathbb{I}$ είναι το σύνολο των αρρήτων αριθμών.

Λύση: (α) Προφανώς η $\rho([a,b],[c,d])$ παίρνει τιμές ≥ 0 ενώ $\rho([a,b],[c,d]) = 0$ σημαίνει ότι, τόσο $|a-c| - 0$, όσο και $|b-d| = 0$. Επομένως $a = c$ και $b = d$, δηλαδή $[a,b] = [c,d]$. Επίσης είναι προφανές ότι $\rho([a,b],[c,d]) = \rho([c,d],[a,b])$.

Ως προς την τριγωνική ανισότητα έχουμε να δείξουμε ότι

$$\max\{|a-c|, |b-d|\} \leq \max\{|a-e|, |b-f|\} + \max\{|e-c|, |f-d|\},$$

για οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[e,f]$. Κάνουμε την υπόθεση (χωρίς βλάβη της γενικότητας, δηλαδή η άλλη περίπτωση θα αντιμετωπιζόταν με ακριβώς τον ίδιο τρόπο) ότι $\max\{|a-c|, |b-d|\} = |a-c|$. Τότε

$$\begin{aligned}
\max\{|a-c|, |b-d|\} &= |a-c| \\
&= |(a-e) + (e-c)| \\
&\leq |a-e| + |e-c| \\
&\leq \max\{|a-e|, |b-f|\} + \max\{|e-c|, |f-d|\}
\end{aligned}$$

(β) Το εσωτερικό του $A = (0,1] \times [0,1) \times (0,1)$ είναι υποσύνολο του A. Κάθε σημείο (x,y,z) του $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ είναι εσωτερικό του A, αφού μπορούμε να βρούμε ανοικτή σφαίρα με κέντρο αυτό και ακτίνα $r > 0$ η οποία να περιέχεται ολόκληρη γνησίως στο A : Αρκεί να πάρουμε το r να είναι μικρότερο από την απόσταση του (x,y,z) από τις πλευρές του κύβου που προσδιορίζει το σύνολο A. Τα υπόλοιπα σημεία του A δεν είναι εσωτερικά: Οποιο από αυτά είναι της μορφής $(1,y,z)$ ή $(x,0,z)$ δεν έχει ανοικτή περιοχή που να περιέχεται ως γνήσιο υποσύνολο του A, αφού οποιαδήποτε τέτοια θα περιέχει σημεία που θα έχουν πρώτη συντεταγμένη μεγαλύτερη του 1 (στην πρώτη περίπτωση) ή δεύτερη συντεταγμένη μικρότερη του 0 (στη δεύτερη περίπτωση).

Η κλειστή θήκη του $B = [0,1] \times (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times (\mathbb{I} \cap (0,1))$ είναι υπερσύνολο του B. Κάθε σημείο (x,y,z) του $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ είναι στην κλειστή θήκη. Κάθε ανοικτή σφαίρα με κέντρο ένα σημείο (x,y,z) του $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ θα τέμνει το B, δηλαδή θα περιέχει ένα σημείο που η δεύτερη συντεταγμένη του θα είναι ρητός μέσα στο διάστημα $(0,1)$ και η τρίτη συνεταγμένη του θα είναι άρρητος μέσα στο διάστημα $(0,1)$. Αυτό συμβαίνει γιατί τόσο οι ρητοί αριθμοί που περιέχονται στο $(0,1)$ όσο και οι άρρητοι που περιέχονται στο $(0,1)$ είναι πυκνοί στο $(0,1)$. Οποιοδήποτε σημείο που δε βρίσκεται στο $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ θα περιέχει μία ανοικτή γειτονιά που θα περιέχεται γνησίως στο $\mathbb{R}^3 - ([0,1] \times [0,1] \times [0,1])$, άρα δε θα τέμνει το B.

Θέμα 2: (α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = (\cos x)^n$. Δείξτε ότι συγκλίνει σημειακά κι εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(β) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Λύση: (α) Για $x = 0$ η ακολουθία παίρνει σταθερά τιμή 1. Για $0 < x \leq \pi/2$ η ακολουθία παίρνει τιμές y^n με$0 \leq y < 1$, άρα για κάθε τέτοιο x η τιμή της οριακής συνάρτησης είναι 0. Εχουμε λοιπόν σημειακή σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων, Η σύγκλιση αυτή δε μπορεί να είναι ομοιόμορφη αφού η οριακή συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 0$ ενώ οι όροι της ακολουθίας συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις.

(β) Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n^3+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ και η σειρά των $M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει απολύτως, η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, από το κριτήριο του Weierstrass.

Θέμα 3: Θεωρούμε το σύνολο με δύο στοιχεία $\{0, 1\}$ ως μετρικό χώρο με τη διακριτική μετρική (επομένως όλα τα υποσύνολά του είναι ανοικτά) και ένα μετρικό χώρο (X, d). Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι συνεκτικός μετρικός χώρος αν και μόνο αν κάθε συνεχής συνάρτηση $f: X \to \{0, 1\}$ είναι σταθερή.

Λύση: ($\Rightarrow$:)Σε ένα χώρο με διακριτική μετρική είναι ανοικτά τα μονοσύνολα, επομένως είναι και τα μόνα υποσύνολα του χώρου που είναι συνεκτικά. Η εικόνα ενός συνεκτικού μετρικού χώρου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτικό υποσύνολο του συνόλου τιμών της συνάρτησης. Επομένως η εικόνα $f[X]$ του συνεκτικού χώρου X μέσω μίας συνεχούς f είναι μονοσύνολο του $\{0, 1\}$, δηλαδή η f παίρνει σταθερά μία τιμή.

($\Leftarrow$:) Υποθέτουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f: X \to \{0, 1\}$ είναι σταθερή και ότι $X = A \cup B$ με τα υποσύνολα A, B του X να είναι ανοικτά και ξένα μεταξύ τους. Μπορούμε τότε να ορίσουμε μία συνάρτηση $f: X \to \{0, 1\}$ με $f(x) = 1$, αν $x \in A$ και $f(x) = 0$, αν $x \in B$. Μία τέτοια f είναι συνεχής, αφού η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού $\{1\}$ είναι το ανοικτό A και του ανοικτού $\{0\}$ είναι το ανοικτό B. Οπως κάθε άλλη συνεχής συνάρτηση, η f είναι σταθερη. Επομένως είτε όλα τα στοιχεία του X παίρνουν την τιμή 1, δηλαδή είναι στο A, ή όλα τα στοιχεία του X παίρνουν την τιμή 0, δηλαδή είναι στο B. Με άλλα λόγια είτε $X = A$ (και $B = \emptyset$) ή $X = B$ (και $A = \emptyset$.)

Θέμα 4: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, οι οποίες έχουν την ιδιότητα ότι, για κάποια k_i, με $k_i > 0$, $i = 1, 2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $|f_i(x) - f_i(y)| \leq k_i|x - y|$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

με

$$f(x_1, x_2) = (\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} f_1(x_1), \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} f_2(x_2)).$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Λύση: Επειδή ο μετρικός χώρος $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι πλήρης, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συστολή, ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε K με $0 < K < 1$ ώστε

$$d(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) \leq Kd((x_1, x_2), (y_1, y_2)),$$

όπου d είναι η μετρική του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ομως

$$\begin{aligned}
d(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) &= \sqrt{\frac{(f_1(x_1) - f_1(y_1))^2 + (f_2(x_2) - f_2(y_2))^2}{k_1^2 + k_2^2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{k_1^2(x_1 - y_1)^2 + k_2^2(x_2 - y_2)^2}{k_1^2 + k_2^2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{\max(k_1, k_2)^2(x_1 - y_1)^2 + \max(k_1, k_2)^2(x_2 - y_2)^2}{k_1^2 + k_2^2}} \\
&= K\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
&= Kd((x_1, x_2), (y_1, y_2)),
\end{aligned}$$

όπου $K = \sqrt{\frac{\max(k_1,k_2)^2}{k_1^2+k_2^2}}$ και η τελευταία ποσότητα είναι προφανώς θετική και < 1.

Θέμα 5: (α) Εξηγείστε γιατί κάθε συνεχής συνάρτηση $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφο όριο κάποιας ακολουθίας παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Δώστε παράδειγμα μη-παραγωγίσιμης συνάρτησης $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθίας παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

(β) Εστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Λύση: (α) Το θεώρημα Stone - Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση επί ενός συμπαγούς υποσυνόλου των πραγματικών αριθμών (όπως το $[-1,1]$) είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθίας πολυωνυμικών συναρτήσεων. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι, φυσικά, παραγωγίσιμες, απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο. Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής $|.|\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, όμως είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθίας ακολουθίας παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με βάση το προηγούμενο.

(β) Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ δίνεται από την αντίστροφη την ποσότητας $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, δηλαδή της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$, δίνεται από το την αντίστροφη ποσότητα της $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{a_{k-1}}{k}} = \frac{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_{k-1}}}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$, άρα οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.